Chapitre V : Limite de suites

- ## Limite finie d'une suite :

Une suite a une limite finie si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$, avec L un réel.

- ## Limite infinie d'une suite :

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, si pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n \geq A$, avec A un réel
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$, si pour tout entier naturel $n \leq N$, $u_n \leq A$, avec A un réel

- ## Suites de référence :

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$, Avec k un réel $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

- ## Opération de limites :

a) Somme de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

b) Produit de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$	$l \times l'$	$+\infty$ *ou* $-\infty$ *(règle des signes du produit)*	$+\infty$ *ou* $-\infty$ *(règle des signes du produit)*	**F.I.**

c) Quotient de deux suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$l \neq 0$ *ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$	0	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$l' \neq 0$	0 *(†)*	0	$+\infty$ *ou* $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ *ou* $-\infty$	$+\infty$ *ou* $-\infty$ *(règle des signes du produit)*	**F.I.**	**F.I.**

d) Formes indéterminées

$\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$

Pour lever une indétermination de limite, en présence de polynôme en n, factoriser par le monôme de degré le plus grand.

- ## Théorème :

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$
Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$

- ### Théorème des gendarmes :

(u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites.

Si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite L, alors la suite (v_n) converge vers L

- ### Théorème limites de suites géométriques :

– Si −1 < q < 1, alors la suite (q^n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

– Si q > 1, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

– Si q = 1, alors la suite (q^n) converge vers 1

– Si q 6 −1, alors la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

- ### Théorème de comparaison :

(u_n) et (v_n) sont deux suites. Si pour tout entier naturel $n \geq n_0$

- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

- ### Théorème de la limite monotone :

Toute suite croissante majorée est convergente
Toute suite décroissante minorée est convergente