Limites de fonctions

- **Définition d'une asymptote horizontale :** On dit que la droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$
  elle est asymptote à la courbe en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.
- **Définition d'une asymptote verticale:** On dit que la droite d'équation $x = L$ est une **asymptote verticale** à la courbe en L lorsque $\lim\limits_{x\to L} f(x) = \pm\infty$

- **Limites de fonctions de référence** (par coeur)

Fonction	définie sur ...	Limite en $-\infty$	Limite en $+\infty$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	non définie	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	0	0
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	0	$+\infty$

-Théorème "des gendarmes" ou d'encadrement

f, g et h sont trois fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$),

Si, pour tout $x \in I$, $g(x) \le f(x) \le h(x)$ et si g et h ont la même limite L en $+\infty$

à savoir si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}$

- **Théorème de comparaison à l'infini:**

f et g sont deux fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$)

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \ge g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \le g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

-Théorème de croissance comparée avec la fonction exponentielle:

Pour tout entier non nul n, on a

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

- **Limite d'une fonction par opérations**

Règles pour le produit

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	L	$L\ (L \neq 0)$	$L\ (L \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
alors $\lim\limits_{x\to a} (u(x) \times v(x)) =$	$L \times L'$	$+\infty$ si $L > 0$ $-\infty$ si $L < 0$	$-\infty$ si $L > 0$ $+\infty$ si $L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Règles pour la somme

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	L'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (u(x) + v(x)) =$	$L + L'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Règles pour le quotient

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) =$	L	$L\ (L \neq 0)$	L	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} v(x) =$	$L'\ (L' \neq 0)$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	0	$+\infty$ ou $-\infty$ (*)	**F.I.**	

* Le choix entre $+\infty$ et $-\infty$ est déterminé par le signe de $u(x)$ et celui de $v(x)$.

- **Théorème de croissance comparée avec la fonction logarithme népérien**
  Pour tout entier non nul n, on a
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0$ et par passage à l'inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{ln(x)} = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to 0+} x^n ln(x) = 0$

- **Théorème : limite d'une fonction composée**
  Soient g et u deux fonctions telles que $g \circ u$ soit définie sur un intervalle I.
  Soient a, b, c trois nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$
  Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ u(x) = c$