BACCALAURÉAT BLANC

Mercredi 22 janvier 2025

MATHEMATIQUES

Epreuve d'enseignement de spécialité

DURÉE de L'ÉPREUVE : **4 heures**

L'utilisation de la calculatrice avec mode examen actif est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P

<u>Exercice 1 :</u> **5 points**

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10% de la quantité médicamenteuse présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}25$
3. a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} < 5$
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang est supérieur ou égale à 1,8 mg.

a) Compléter le script en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de 30 minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
  u=1
  n=0
  while ......:
      u=......
      n = n+1
   return n
```

b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2{,}5 - u_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n ; $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n$.

c) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.

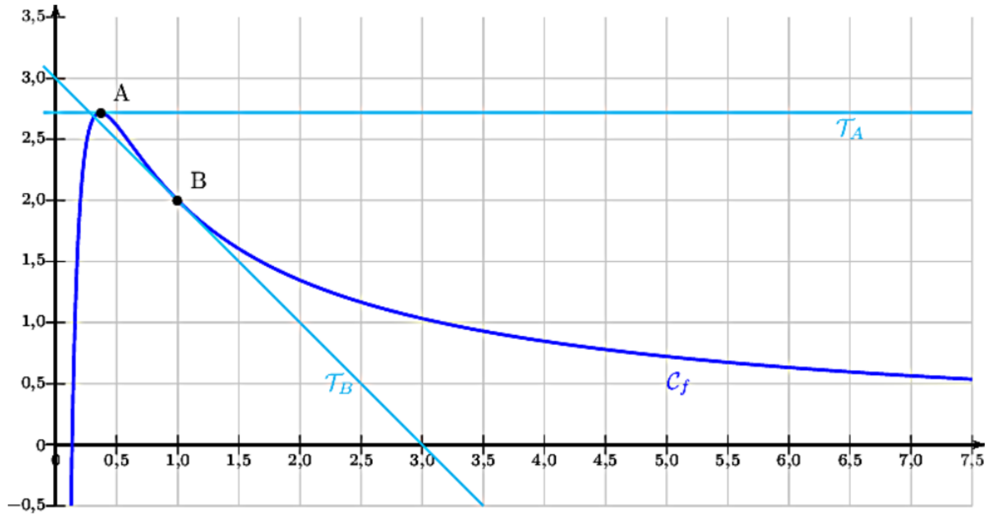
D'après le modèle choisi, le traitement présent-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

<u>Exercice 2</u> : **5 points**

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe C_f au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\ ;e\right)$;
- la tangente T_B à la courbe C_f au point B de coordonnées $(1\ ;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\ ;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe C_f passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$,
$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}$$
3. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Justifier.
4. Déterminer, par le calcul l'équation de la tangente en $x = 1$.
5. Calculer f'' la fonction dérivée seconde de f.
6. Etudier la convexité de la fonction f.

Exercice 3 : **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$$

Partie I

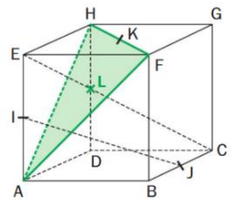
Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E).
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').
5. Montrer que la fonction f est solution de l'équation (E).
6. Calculer la primitive F de la fonction f telle que $F(0) = 5$.

Partie II

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$.
2. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec les axes du repère.

Exercice 4 : **2 points**



ABCDEFGH est un cube. I, J, et K sont les milieux respectifs des segments [AE], [BC] et [HF] et L est le point d'intersection de la droite (CE) avec le plan (HFA).

Pour chacune des questions, qui sont indépendantes entre elles, une seul des quatre réponses proposées est correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. Les droites (IJ) et (EC) sont :

a) Strictement parallèles b) sécantes c) non coplanaires d) confondues

2. Les droites (JH) et (EC) sont :

a) Strictement parallèles b) sécantes c) non coplanaires d) confondues

3. On a :

a) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ b) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$

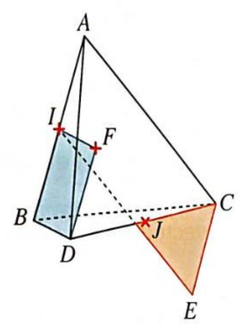
c) $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$ d) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

4. La droite (GB) est :

a) Strictement parallèle au plan (HKL) b) sécante au plan (HKL)

c) Incluse dans le plan (HKL) d) aucun des trois choix précédents

Exercice 5 : **3 points**



On considère un tétraèdre ABCD. I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

On construit les points E et F tels que les quadrilatères IACE et IBDF soient des parallélogrammes.

On souhaite démontrer que les points E, J et F sont alignés.

Partie I : Méthode vectorielle

1. Montrer que $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IJ}$
2. En déduire les égalités suivantes : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{IJ}$
3. En déduire que les points E, J et F sont alignés

Partie II : Méthode analytique

On se place dans le repère $\left(B\ ;\ \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$.

1. Donner les cordonnées des points : B, C, D, A, I et J sans justification.
2. En déduire, par le calcul, celles des points E et F.
3. Conclure.