Corrigé du bac blanc mars 2025

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** Retrancher 2 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$.
D'une année sur l'autre on multiplie le nombre de panneaux par 0,98 puis on augment de nombre de panneaux de 250.

   b. Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis $\times 0,98 + 50$.
Entrée donne $u_1 \approx 10599$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3, etc.
On obtient $u_{68} \approx 12\,009$.
le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.

   c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while u ⩽ 12000 :
    u = 0,98 ∗ u + 250
    n = n + 1
```

2. *Initialisation* : $u_0 = 10\,560 \leqslant 12\,500$: la proposition est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 12\,500$ soit en multipliant par 0,98 :
$0,98u_n \leqslant 0,98 \times 12\,500$ et en ajoutant 250 à chaque membre :
$0,98u_n + 250 \leqslant 0,98 \times 12\,500 + 250$ ou $u_{n+1} \leqslant 12\,250 + 250$ et finalement
$u_{n+1} \leqslant 12\,500$: la proposition est vraie au rang $n+1$.
La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 12\,500$ est vraie pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.
Or d'après le résultat précédent :
$u_n \leqslant 12\,500 \Rightarrow 0,02u_n \leqslant 0,02 \times 12\,500$ ou encore $0,02u_n \leqslant 250$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:
$0 \leqslant 250 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite ℓ, telle que $\ell \leqslant 12\,500$.

5. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,500 = 0,98u_n + 250 - 12\,500$, soit
$v_{n+1} = 0,98u_n - 12\,250 = 0,98u_n - 12\,250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12\,500 \times 0,98 = 0,98\,(u_n - 12\,500)$ soit enfin $v_{n+1} = 0,98v_n$: cette relation vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 de premier terme $v_0 = u_0 - 12\,500 = 10\,560 - 12\,500 = -1\,940$.

   b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times 0,98^n$, soit $v_n = -1\,940 \times 0,98^n$.

   c. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 12\,500 \iff u_n = v_n + 12\,500 = 12\,500 - 1\,940 \times 0,98^n$.

   d. Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 0,98^n = 0$, donc
$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 12\,500$
le nombre de panneaux va tendre vers 12 500.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

1. La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = -0,02 \times (-500)\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 10\mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$.

   Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on en déduit que $f'(x) > 0$: la fonction est donc strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$

2. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x) = 12\,500$.

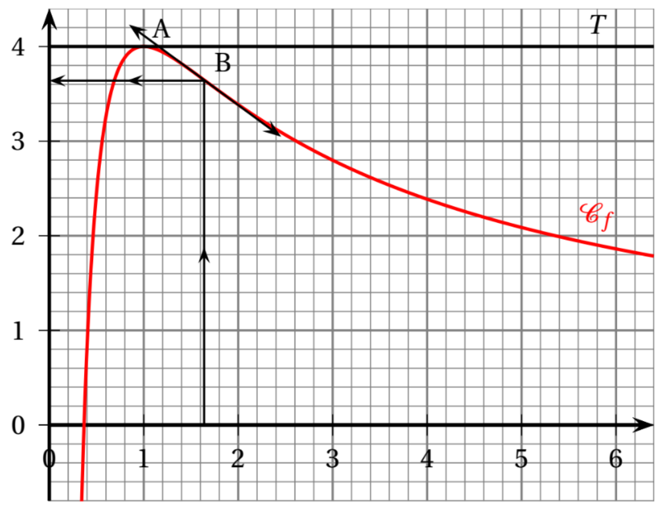
3. Il faut résoudre l'inéquation :

   $12\,500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} > 12\,000 \iff 500 > 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} \iff 1 > \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} \iff \mathrm{e}^{0} \geqslant \mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$, soit par croissance de la fonction exponentielle :

   $0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4$ et en multipliant chaque membre par 50 :

   $x > 70$: il faut donc attendre 71 ans pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000, soit en 2091.

EXERCICE 2 **5 points**



1. A(1 ; 4) $\in \mathscr{C}_f$, donc $f(1) = 4$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4) ; le coefficient directeur de cette tangente en ce point est nul ou encore le nombre dérivé est nul : $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas et sur cet intervalle :

   $f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

3. En utilisant les résultats du **1.** :

   $f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4$;

   $f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4+4\ln x}{x}.$$

4. • $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 4+4\ln x = -\infty$ donc par quotient $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$;

• On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + 4\dfrac{\ln x}{x}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ et on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc par somme :
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. On a donc sur $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.

On sait que sur $]0~;~1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0;~1[$;

Par contre sur $]1~;~+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1~;~+\infty[$;

$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1;~4)$ est le maximum de la fonction sur $]0~;~+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0;~1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1~;~+\infty[$

6. f'étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et sur cet intervalle :
$f''(x) = \dfrac{-4\times\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times(-4\ln x)}{x^4} = \dfrac{-4x+8x\ln x}{x^4} = \dfrac{-4+8\ln x}{x^3}$.

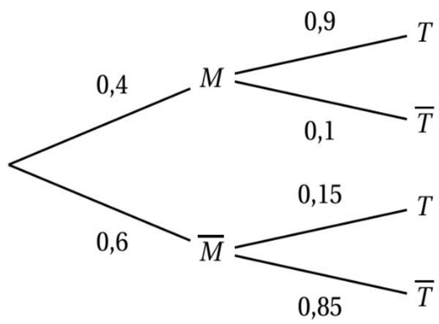
7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :
$f''(x) = 0 \iff \dfrac{-4+8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4+8\ln x = 0 \iff -1+2\ln x = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff$
$x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,649$ $\left(\text{ou } \sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4+4\times\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3,639$.

Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.

EXERCICE 3 — 5 points

D



b. Il faut trouver $P(M\cap T) = P(M)\times P_M(T) = 0,4\times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P\left(\overline{M}\cap T\right) = P\left(\overline{M}\right)\times P_{\overline{M}}(T) = 0,6\times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales :
$P(T) = P(M\cap T) + P\left(\overline{M}\cap T\right) = 0,36+0,09 = 0,45$.

d. Il faut trouver $P_T(M) = \dfrac{P(M\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,36}{0,45} = \dfrac{36}{45} = \dfrac{9\times 4}{9\times 5} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$.

2. a. On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.
La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question **1. c.**.

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,0365$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.
Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

3. a. On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de $0,45$.
On a $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n$.
Donc $p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n$.

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

c. On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,55^n$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,55 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \leqslant n$ (car $\ln 001 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \approx 7,7$.
Conclusion : le programme renvoie la valeur 8.

Exercice 4 : 5 points

1. $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ $P\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $N\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{MP}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{NP}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ d'où $\vec{DF}\cdot\vec{MP} = 1\times 0 + (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

$\vec{DF}\cdot\vec{NP} = 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\times 0 = 0$

2. D'après la question 1, le vecteur $\vec{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (MNP) : $\vec{MP}$ et $\vec{NP}$.
Donc il est orthogonal au plan (MNP) et (DF) est perpendiculaire au plan (MNP)

3. Comme N et T sont des points du plan (MNP), $\vec{NT}$ et $\vec{DF}$ sont orthogonaux d'après la question 2. et, comme T est un point de (DF), les droites (NT) et (DF) sont perpendiculaires avec T pour point d'intersection.
Donc T est bien le projeté orthogonal de N sur (DF). $\vec{DN}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

4. $\vec{DF}\cdot\vec{DN} = \vec{DF}\cdot\vec{DT}$
$= DF \times DT$ et $\vec{DF}\cdot\vec{DN} = 1\times 1 + (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\times\frac{1}{2} = 2$
car T est le projeté orthogonal de N sur (DF)

d'où $DF \times DT = 2$ or $DF = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
donc $DT = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ qui est la distance de D au plan (MNP)

5. a. I milieu de [PN], donc $I\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\vec{MI}\begin{pmatrix}1/4\\-1/4\\-1/2\end{pmatrix}$ et $\vec{PN}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

d'où $\vec{MI}\cdot\vec{PN} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\times 0 = 0$
donc les vecteurs $\vec{MI}$ et $\vec{PN}$ sont orthogonaux.

b. $\text{Aire}(MNP) = \dfrac{PN \times MI}{2} = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} \times \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{8}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

c. $\text{volume}(DMNP) = \dfrac{\text{Aire}(MNP) \times DT}{3} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{2}{\sqrt{3}}}{3} = \dfrac{1}{12}$