Exercice 1 : 5 points

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. a. Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.

   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while ...... :
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq 12500$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.

   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 12500 - 500e^{-0{,}02x+1{,}4},$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.

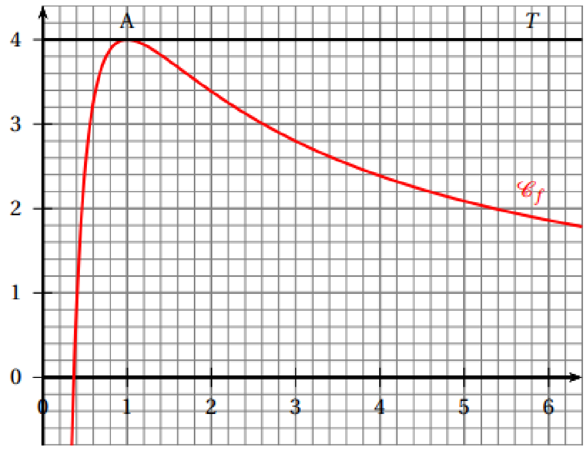
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

Exercice 2 : 5 points

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point A(1; 4).



1. Préciser les valeurs $f\ (1)$ et $f\ '\ (1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f\ (x)\ =\ \frac{a\ +b\ lnx}{x}$$ où a et b sont deux nombres réels.

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f\ '\ (x)\ =\ \frac{b-a-b\ lnx}{x^2}\ .$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f\ (x)\ =\ \frac{4+4lnx}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f\ ''(x)\ =\ \frac{-4+8lnx}{x^3}$$

7. Montrer que la courbe C_f possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

<u>Exercice 3</u> : 5 points

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus. Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.

On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire. Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les évènements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\bar{M}$ et $\bar{T}$ désignent les évènements contraires des évènements M et T respectivement.

1. a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

   b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

   c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.

   d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

   a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

   b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

   c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

   d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

   a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}55^n$.

   b. Pour quel nombre n de chats, la probabilité p_n dépassera-t-elle 0,99 ?

Exercice 4 : **5 points**

Dans un cube ABCDEFGH de côté 1, on considère les points M, N et P centres respectifs des faces EFGH, BCGF et ABFE.

On considère le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{NP}$.

2. Montrer que (DF) est perpendiculaire à (MNP).

3. Soit T le point d'intersection de (DF) et (MNP).
   Montrer que T est le projeté orthogonal de N sur (DF).

4. En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DN}$, déterminer la distance du point D au plan (MNP).

5. On note I le milieu de [PN].

   a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont orthogonaux.

   b) En déduire l'aire du triangle MNP.

   c) En déduire le volume du tétraèdre DMNP.