Chapitre XI : Fonctions Continues

1 Définitions fondamentales

Continuité en un point

Une fonction f est continue en $a \in I$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Continuité sur un intervalle

f est continue sur un intervalle I si et seulement si f est continue en tout point de I.

Propriétés

- Les fonctions usuelles (polynômes, exponentielle, racine carrée, valeur absolue...) sont continues sur leur domaine de définition.
- Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ (si $g \neq 0$) sont continues sur I.
- Si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont continues, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I.

2 Dérivabilité et continuité

- Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
- Attention : la réciproque est fausse.
  Exemple : $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

3 Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Théorème 1 (Valeurs intermédiaires)**.** *Si f est continue sur $[a; b]$ et que k est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.*

Corollaire 1 (Unicité)**.** *Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors il existe un unique $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.*

4 Suites et continuité

- Si $\lim_{n\to\infty} u_n = L \in I$ et f est continue en L, alors :

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) = f(L)$$

Théorème 2 (Petit théorème du point fixe)**.** *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé I tel que $f(I) \subset I$, et soit une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$.*

— *La suite (u_n) est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.*

— *Si la suite converge vers une limite L, alors L est solution de $f(x) = x$:*

$$\Rightarrow L \text{ est un point fixe de } f.$$