BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INDUSTRIE ET DU DEVELOPPEMENT DURABLE

Physique-Chimie et Mathématiques

MERCREDI 19 JUIN 2024

Durée de l'épreuve : **3 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 11 pages numérotées de 1/11 à 11/11.

PHYSIQUE-CHIMIE .... 14/20 points
MATHÉMATIQUES .... 6/20 points

EXERCICE 1 (4 points) (physique-chimie et mathématiques)

Concert musical

Lors d'un concert de musique rock organisé dans la ville de Venise, une scène flottante était placée à 120 m au large de la côte et donc des spectateurs du premier rang. Cette configuration particulière a posé des problèmes d'acoustique liés à l'atténuation différentielle du son émis par les différents instruments, notamment du fait de l'influence de la fréquence du son sur la directivité de l'émission par les haut-parleurs. L'exercice propose de modéliser cette situation à partir de données expérimentales.

Données :

- Fréquences correspondant à certaines notes de musique :

Note	Do1	La1	Mi2	Ré3	Do4	Fa4	Si4
Fréquence (Hz)	65,4	110	165	294	523	698	988

- Le niveau sonore L (en dB) d'une onde sonore est relié à son intensité acoustique I (en $W \cdot m^{-2}$) par la relation :

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} ,$$

où $I_0 = 10^{-12}\, W \cdot m^{-2}$ et log désigne le logarithme décimal.

Sonorisation du concert

Pour étalonner le système d'amplification des sons, on choisit deux notes de fréquences distinctes émises par la guitare, notées note 1 et note 2, et on étudie les signaux correspondants.

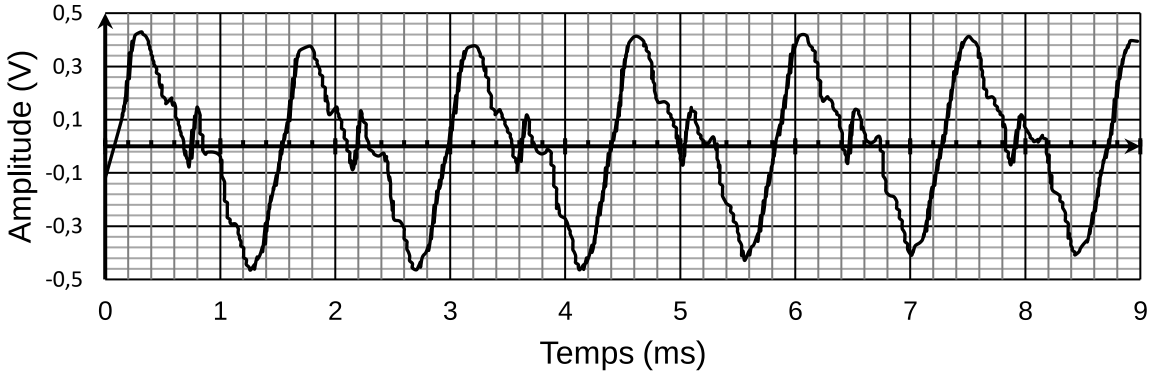


Figure 1 - Signal pour la note 1

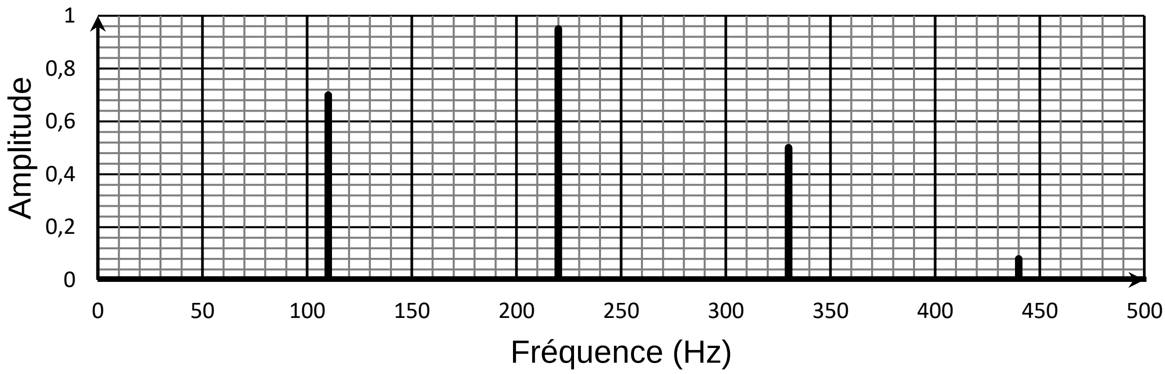


Figure 2 - Spectre en fréquence du signal obtenu pour la note 2

Q1. Déterminer la fréquence du signal représenté sur la figure 1 et indiquer la note de musique correspondante.

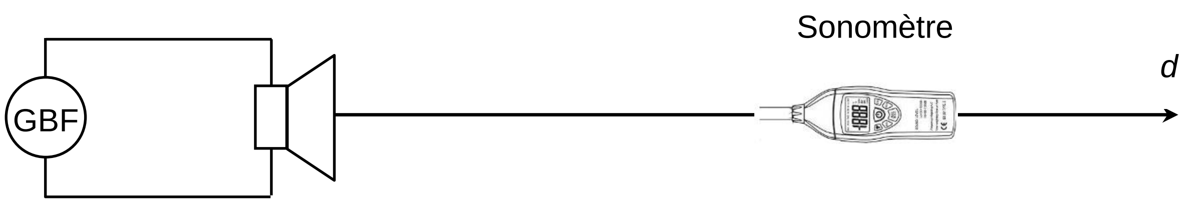
Q2. Indiquer, en justifiant votre réponse, si le son dont le spectre en fréquence est représenté sur la figure 2 est pur.

Q3. Identifier la note 2 associée au son dont le spectre en fréquence est représenté sur la figure 2.

Lors du concert, le niveau sonore mesuré au niveau des spectateurs les plus proches de la scène était de 100 dB.
Les normes relatives à la prévention des risques liés au bruit en vigueur lors du concert fixaient une intensité acoustique maximale de valeur $I_{max} = 3,1 \times 10^{-2}$ W·m^{-2}.

Q4. Vérifier si le niveau sonore mesuré lors du concert respectait cette norme.

Étude expérimentale
Pour étudier la variation du niveau sonore du signal lors de sa propagation, on mesure celui-ci à l'aide d'un sonomètre, placé à différentes distances de la source dans une direction donnée (document 1).
Un générateur connecté aux enceintes permet d'émettre deux notes distinctes : un La1 puis un Fa4. Les mesures obtenues pour chaque note figurent dans le document 2.



Document 1 - Schéma de l'expérience

Distance d (m)	10	20	30	50	70	90	100	110
L_1 pour le La1 (dB)	102,0	95,6	94,6	84,0	81,6	80,3	78,7	78,7
L_2 pour le Fa4 (dB)	97,0	95,7	88,0	89,6	85,3	82,1	81,2	79,0

Document 2 - Tableau des mesures des niveaux sonores.

On détermine ensuite des modèles numériques (valables pour une distance supérieure à 1 m), donnant les niveaux sonores de chaque note en fonction de la distance.
Sur la base de ces modèles, on obtient les expressions suivantes :

- pour le La1 : $L_1 = 125 – 10 \ln(d)$;
- pour le Fa4 : $L_2 = 117 – 7{,}5 \ln(d)$,

où d est exprimé en m, L_1 et L_2 sont exprimés en dB et ln désigne le logarithme népérien.

On étudie mathématiquement le modèle obtenu en introduisant les fonctions f et g définies sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 125 – 10 \ln(x) \text{ et } g(x) = 117 – 7{,}5 \ln(x) .$$

Ces fonctions modélisent respectivement les niveaux sonores du La1 et du Fa4 en fonction de la distance.

Q5. Déterminer une expression de $f\,'(x)$ où $f\,'$ est la fonction dérivée de f sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

On modifie désormais les réglages d'émission pour améliorer la qualité du son. Les expressions des nouvelles fonctions décrivant la dépendance de L_1 et L_2 avec la distance sont alors :

$$f_m(x) = 148 – 10 \ln(x) \text{ et } g_m(x) = 136 – 7{,}5 \ln(x) ,$$

respectivement, pour les notes La1 et Fa4.

Q6. Résoudre l'équation $f_m(x) = g_m(x)$ correspondant à $148 – 10 \ln(x) = 136 – 7{,}5 \ln(x)$ (arrondir le résultat à 10^{-1}).
En déduire la distance d_m des enceintes à laquelle doit se trouver le public pour que les deux notes aient le même niveau sonore.

Q7. Pour les réglages modifiés, calculer le niveau sonore du son reçu par les spectateurs à la distance d_m des enceintes pour chacune des notes.

EXERCICE 2 (4 points) (physique-chimie)

Utilisation du Cobalt 60 en médecine

Un dispositif de radiochirurgie en dose unique, basé sur l'utilisation des rayons gamma émis par des sources radioactives de cobalt 60, a récemment été mis en œuvre. L'appareil permet de traiter des cibles dans le cerveau du patient en administrant une dose très forte de radiations dans une région ultra localisée. On peut ainsi traiter des tumeurs de petite taille, situées dans des régions profondes du cerveau et donc inopérables.

Source : www.chu-lyon.fr/

Données :

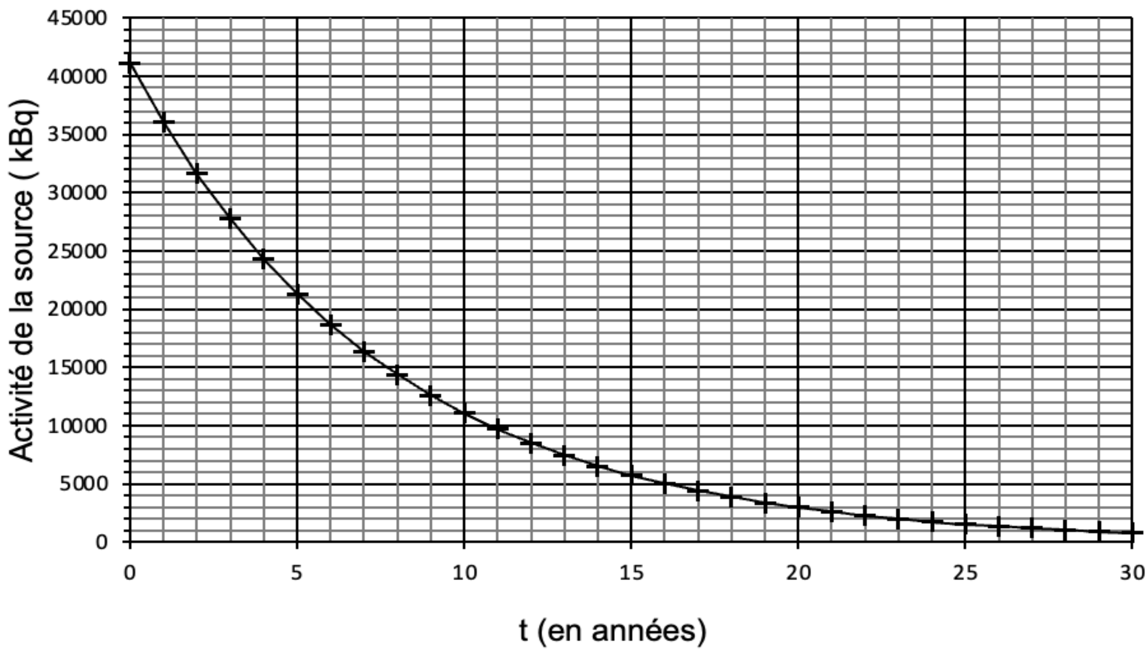
- Constante de Planck : $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s .
- Célérité de la lumière dans le vide $c = 3{,}00\times10^{8}$ m·s^{-1} .
- 1 kBq correspond à 1000 désintégrations par seconde.

Le cobalt 60, de symbole ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ se désintègre pour donner un noyau fils de nickel de symbole ${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$ selon une désintégration de type β^-.

Q1. Rappeler les différents types de rayonnement radioactif. Préciser la nature de la particule émise lors de la désintégration du ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ en ${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$.

Le noyau fils ${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$ issu de cette désintégration est dans un état excité. Il se désexcite en émettant un photon d'énergie $2{,}13\times10^{-13}$ J.

Q2. Calculer la fréquence, puis la longueur d'onde du rayonnement émis au cours de la désexcitation du ${}^{60}_{28}\mathrm{Ni}$.



Document 1 - Décroissance de l'activité d'un échantillon de cobalt 60

Le traitement des déchets diffère selon la valeur de la demi-vie des éléments radioactifs qu'ils contiennent. Les éléments dont la durée de demi-vie est inférieure à 31 ans peuvent être stockés sur le lieu d'utilisation. On considère qu'au bout d'une durée de 10 demi-vies, l'activité de la source est négligeable.

Le document 1 représente la courbe de décroissance radioactive au cours du temps de l'activité d'un échantillon de cobalt 60 utilisé en milieu hospitalier.

Q3. Définir l'activité d'une source radioactive et déterminer l'activité initale de l'échantillon de cobalt 60 considéré.

Q4. À l'aide du document 1, déterminer la durée de demi-vie du cobalt 60 en expliquant la méthode.

Q5. Calculer la durée au bout de laquelle on peut considérer que l'activité de l'échantillon est négligeable. Préciser alors si les noyaux de ${}^{60}_{27}Co$ sont présents dans la nature.

EXERCICE 3 (4 points)

(mathématiques)

Dans cet exercice, les questions 1, 2, 3 et 4 peuvent être traitées de façon indépendante les unes des autres.

Un parachutiste est en chute libre dans l'air jusqu'à l'instant $t = 0$ où il ouvre son parachute. Sa vitesse est alors de $50\ \mathrm{m.s^{-1}}$. On admet par la suite que sa vitesse v, en $\mathrm{m.s^{-1}}$, en fonction du temps t, en s, est solution de l'équation différentielle sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$\text{(E)} : y' = -5y + 10 .$$

Question 1

La fonction constante g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = 2$ est-elle une solution de l'équation différentielle (E) ? Justifier la réponse.

Question 2

Montrer que les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$ sont les fonctions f définies sur cet intervalle par $f(t) = k\mathrm{e}^{-5t} + 2$, où k est un nombre réel donné.

Question 3

En admettant le résultat de la question précédente, montrer que la fonction v est donnée sur $[0; +\infty[$ par $v(t) = 48\mathrm{e}^{-5t} + 2$.

Question 4

La distance parcourue, en mètre, par le parachutiste pendant les 10 premières secondes après ouverture du parachute est donnée par l'intégrale :

$$\int_0^{10} (48\mathrm{e}^{-5t} + 2)\ \mathrm{d}t.$$

Calculer cette intégrale (arrondir à 10^{-1}).

EXERCICE 4 (8 points) (physique-chimie)

Limitation de vitesse et climat

En 2020, lors de la convention citoyenne pour le climat, il a été proposé de baisser la vitesse maximale autorisée sur l'autoroute de 130 km·h^{-1} à 110 km·h^{-1} afin de réduire les émissions de CO_2 des moteurs thermiques, en partie responsables du réchauffement climatique.

Cet exercice étudie quantitativement les effets que l'on pourrait attendre d'une telle mesure.

Vitesse et énergies

Données :
- Conversion d'énergie : 1 Wh = $3{,}6 \times 10^3$ J
- Conversion de vitesse : 1 m·s^{-1} = 3,6 km·h^{-1}
- La diminution relative d'une grandeur X dont la valeur passe de X_{initial} à X_{final} est définie par : $\frac{X_{\text{initial}} - X_{\text{final}}}{X_{\text{initial}}}$.

Q1. Montrer que l'énergie cinétique que possède une voiture de masse m = 1260 kg lorsqu'elle roule à la vitesse de 110 km·h^{-1} est voisine de 163 Wh.

Q2. L'énergie cinétique de la même voiture roulant à 130 km·h^{-1} vaut 228 Wh. Conclure sur l'impact de la diminution de limitation de la vitesse du véhicule sur les dégâts possibles lors d'un accident.

Les frottements de l'air sur la voiture sont des forces de résistance aérodynamique qui peuvent être représentées par une force $\vec{F}$ de même direction que le déplacement du véhicule et de sens opposé à celui-ci.

La valeur F de cette force est proportionnelle au carré de la vitesse du véhicule v. On donne la relation :

$$F = k \times v^2 ,$$

où k est une constante. Pour la voiture considérée on a : k = 0,404 kg·m^{-1}. Dans cette relation, la force est en Newton et la vitesse en m·s^{-1}.

Q3. Montrer que le travail W de la force de frottement de l'air sur la voiture, pour un trajet rectiligne de 100 km parcouru à la vitesse constante de 110 km·h^{-1}, est voisin de – 38 MJ.

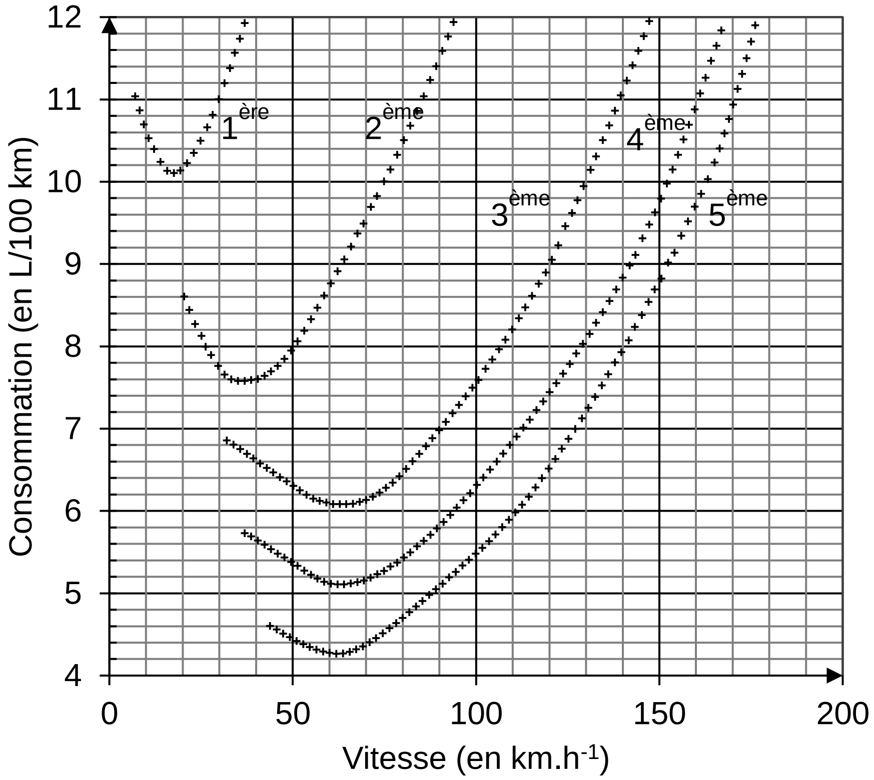
Le travail de la force de frottement de l'air sur la même voiture roulant à la vitesse constante de 130 km·h^{-1} sur une distance de 100 km vaut – 53 MJ.

La diminution de la vitesse de 130 km·h^{-1} à 110 km·h^{-1} correspond donc à une diminution relative de la vitesse de 15 % environ.

Q4. Montrer que cette diminution de vitesse entraîne une diminution relative d'environ 28% de l'énergie nécessaire pour compenser le travail de la force de frottement de l'air.

Vitesse et émission de CO_2

La consommation d'essence d'une voiture, qui se déplace à vitesse constante, dépend de sa vitesse de déplacement et du rapport de la boîte de vitesse utilisé.
Le document 1 présente la consommation théorique d'un « moteur-exemple » pour cinq rapports différents de la boîte de vitesse.



Document 1 - Consommation de carburant du véhicule en fonction de la vitesse, pour les cinq rapports de la boîte de vitesse (1$^{\text{ère}}$ à 5$^{\text{ème}}$)

Source : « Transmissions dans l'automobile - Influence sur la consommation du véhicule »

Q5. On utilise le 5$^{\text{ème}}$ rapport de la boite de vitesse. Déterminer, à l'aide du document 1, les volumes de carburant consommés pour un trajet de 100 km parcouru, d'une part à la vitesse constante de 110 km·h^{-1} et d'autre part, à la vitesse constante de 130 km·h^{-1}.
En déduire que le volume de carburant économisé par une baisse de la vitesse de 130 km·h^{-1} à 110 km·h^{-1} est de l'ordre de 1,2 L pour un trajet de 100 km.

La diminution relative de consommation d'essence associée à cette diminution de vitesse, est voisine de 17 %.

Q6. Comparer cette diminution relative à celle calculée à la question Q4. Commenter l'écart constaté.

Combustion de carburant et émission de CO_2

La combustion du carburant dans le moteur produit du dioxyde de carbone CO_2, qui est le principal gaz à effet de serre issu de l'activité humaine.
On considère que le carburant utilisé est équivalent à de l'octane, de formule C_8H_{18}.
L'équation de sa combustion dans le moteur est :

$$C_8H_{18\,(l)} + \frac{25}{2}\,O_{2\,(g)} \rightarrow 8\,CO_{2\,(g)} + 9\,H_2O_{\,(g)}$$

Q7. Montrer que la quantité de matière d'octane (de masse molaire M = 114 g·mol^{-1}) présente dans 1,2 L d'essence de masse volumique ρ = 750 g·L^{-1}, a une valeur de 7,9 mol.

Q8. Établir, à l'aide de l'équation donnée, la relation entre les quantités de matière d'octane consommé, notée $n_{C_8H_{18}}$, et de dioxyde de carbone produit, notée n_{CO_2}.

Q9. En déduire que la combustion de 1,2 L d'essence produit un peu plus de 63 mol de CO_2.

Q10. Calculer la masse de CO_2 qu'on évite ainsi de produire, pour 100 km parcourus, en diminuant la vitesse des véhicules de 130 km·h^{-1} à 110 km·h^{-1} (on donne la masse molaire du dioxyde de carbone : $M(CO_2)$ = 44 g·mol^{-1}).

D'après le rapport de l'Association des Sociétés Françaises d'Autoroutes, 83 milliards de kilomètres ont été parcourus sur les autoroutes par des voitures en 2022.

Q11. Estimer la diminution de masse de CO_2 rejetée dans l'atmosphère, par an en France, correspondant à une baisse de la vitesse maximale sur autoroute de 130 km·h^{-1} à 110 km·h^{-1}. Pour ce calcul en ordre de grandeur, on admettra que les véhicules roulent tout le temps à la vitesse limite autorisée et qu'ils sont tous identiques à celui étudié.

Q12. À l'aide du document 2 (page suivante), déterminer quel type d'agglomération émet, par an, une masse de CO_2 équivalente à celle déterminée dans la question Q11, sachant qu'en France l'empreinte carbone moyenne annuelle est d'environ 8 tonnes d'équivalent CO_2 par habitant.

Population	Dénomination de l’agglomération
Moins de 2 000 habitants	Village
2 000 à 5 000 habitants	Bourg
5 000 à 20 000 habitants	Petite ville
20 000 à 50 000 habitants	Ville moyenne
50 000 à 200 000 habitants	Grande ville
Plus de 200 000 habitants	Métropole

Document 2 - Limites statistiques proposées par l'INSEE *Source : wikipedia.org*

Baccalauréat **STI2D**

Session 2024

Épreuve : **Physique-chimie et mathématiques**

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 16

PROPOSITION DE CORRIGÉ

Exercice1

Q1 : A l'aide de la figure 1 on détermine la période T= 1.45ms.
La fréquence f=1/T soit environ 680Hz. La note de musique correspondante est Fa4.

Q2 : Le son 2 n'est pas un son pur, le spectre en fréquence n'est pas composé d'un seul pic qui correspondrait au fondamental.

Q3 : La note 2 associée au son est La 1 (fréquence de 110 Hz).

Q4 : On utilise la formule du niveau sonore L en fonction de l'intensité acoustique I, on obtient $I = I_0 * 10^{L/10}$

soit $I = 10^{-12} * 10^{100/10}$ $I = 10^{-2}$ W $.m^{-2}$

Le niveau sonore respecte la norme.

Q5 : $f'(x) = \frac{-10}{x}$

Q6 : On cherche à résoudre l'équation $\boldsymbol{148 - 10ln(x) = 136 - 7.5ln(x)}$ soit

$$148 - 136 = 10ln(x) - 7.5ln(x)$$

12= $2.5ln(x)$

$$x = e^{12/5}$$

$$x = 121.5m$$

Q7 : En utilisant les formules des réglages modifiés, on trouve que les niveaux sonores perçus par les spectateurs à une distance de 121.5m des enceintes sont de 100 dB pour chacune des notes.

$$148 - 10\ ln(121.5) = 136 - 7.5\ ln(121.5) = 100$$

Exercice2

Q1 : Les différents types de rayonnements sont :

- le rayonnement α
- le rayonnement β^-
- le rayonnement β^+
- le rayonnementγ

Lors de la désintégration β^- du Cobalt en Nickel, il y a émission d'un électron.

Q2: E=hυ d'où $\upsilon = E/h$ $\upsilon = 2{,}13.10^{-13} / 6{,}63.10^{-34}$ $\upsilon = 3{,}2.10^{20}$ s

$\lambda = c/\upsilon$ $\lambda = 0{,}94\ .10^{-12}$m

Q3: L'activité d'une source radioactive se définit comme le nombre de désintégrations par seconde . Elle a pour unité le Becquerel.
D'après le document, l'activité initiale de l'échantillon de Cobalt est de 40000kBq.

Q4: Pour déterminer la demi-vie on regarde la valeur de t pour laquelle l'activité initiale est divisée par 2. Sur le document 1, on lit : t = 5,5 ans.

Q5: Au bout de 10 demi-vies on est à t = 55 ans. On ne retrouve pas de noyaux dans la nature.

Exercice 3

Question 1 :

g(t)=2
g'(t) =0
En remplaçant dans l'équation (E), on a 0= -5 x 2 +10
La fonction g(t)=2 est une solution de l'équation différentielle (E).

Question 2:

L'équation (E) est de la forme y'=ay+b avec a= -5 et b = 10.
La solution de cette équation est de la forme f(t)= ke^{at} -$\frac{b}{a}$ soit f(t)= ke^{-5t} +2

Question 3 :

D'après l'énoncé, à t=0 , v= 50m/s.

A t=0, on a k+2 = 50 soit k=48 Par conséquent, en admettant que v(t) est solution de l'équation (E),
on a bien v(t) = $48e^{-5t}$ +2.

Question 4 :
La primitive de la fonction $48e^{-5t}$ +2 est $-\frac{48}{5}e^{-5t}$ +2t

$$I = \int_0^{10} \left(48e^{-5t} + 2\right) dt = \left[-\frac{48}{5}e^{-5t} + 2t\right]_0^{10}$$

I= 29.6

Pendant les 10 premières secondes, le parachutiste parcourt 29.6 m.

__**Exercice 4**__

Q1 : L'énergie cinétique est donnée par la relation $E = \frac{1}{2} m\, v^2$

soit $E = 0.5 * 1260 * 30{,}55^2$

$$\underline{E = \mathbf{587} kJ \ soit\ \mathbf{163}\, W\boldsymbol{h}}$$

Q2 : la diminution de l'énergie cinétique est liée à une diminution de la vitesse. Lors d'un choc, l'énergie cinétique du véhicule est dissipée par déformation de l'obstacle, du véhicule et transfert aux passagers.

Q3 : Le travail $W = -F * d$

$$W = -38\, MJ$$

Q4 : la diminution de vitesse entraîne une diminution relative de l'énergie de:

$$\frac{(228 - 163)}{228} = 0.28\ soit\ 28\%$$

Q5 : En utilisant le 5eme rapport de vitesse,
à 100km/h la consommation de carburant est de 6 litres/ 100km.
à 130km/h, la consommation est de 7,2 litres/ 100km.

Le volume de carburant économisé en réduisant la vitesse est de 7,2 -6 = 1,2 litre pour un trajet de 100 km.

Q6 : Les variations de vitesse entraînent une plus grosse perte d'énergie cinétique qu'à basse vitesse, et une consommation plus importante de carburant. L'énergie cinétique n'est pas proportionnelle à la vitesse mais à son carré.

Q7 : la masse est donnée par la formule $m = \rho * V$
Soit $m = 750 * 1{,}2 = 900\ g$

La quantité de matière est donc $900/114 = 7{,}9\ mol$

Q8 : D'après l'équation, pour 1 mole d'octane, on a 8 moles de dioxyde de carbone.

Q9 : La quantité de dioxyde de carbone produite est donc $8 * 7{,}9 = 63{,}2\ mol$

Q10 : En diminuant la vitesse de 130km/h à 110 km/h on économise 1,2 litre de carburant pour un parcours de 100 km.
La quantité de dioxyde de carbone non rejetée est alors de 63,2 mol soit $63{,}2 * 44 = 2781\ g$.
On évite ainsi de produire 2,78 kg de dioxyde de carbone.

Q11 : Avec 83 milliards de km parcourus, en diminuant la vitesse on peut éviter le rejet de

$$83 * 10^9 * 2.78/100 = 2{,}31.10^9\ kg\ soit\ 2{,}31\ .10^6\ tonnes\ de\ dioxyde\ de\ carbone$$

Q12 : en considérant l'empreinte carbone de 8 tonnes équivalent de dioxyde de carbone par habitant et par an, la quantité déterminée à la question précédente correspond à celle d'une métropole de plus de 200000 habitants.

$2{,}31\ .10^6$/ 8 = 288 750.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INDUSTRIE ET DU DEVELOPPEMENT DURABLE

Physique-Chimie et Mathématiques

LUNDI 20 MARS 2023

Durée de l'épreuve : **3 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1/10 à 10/10.

PHYSIQUE-CHIMIE .... 14/20 points

MATHÉMATIQUES .... 6/20 points

EXERCICE 1 (4 points) (physique-chimie et mathématiques)

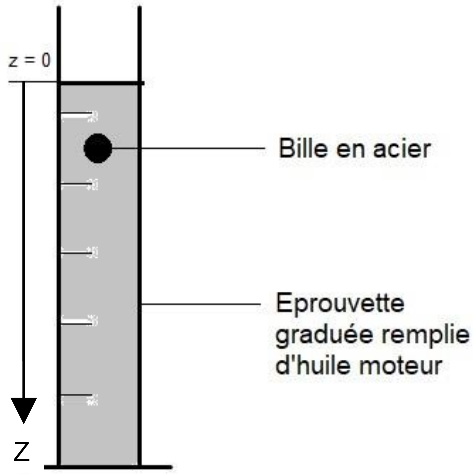
Le viscosimètre à chute de bille

La viscosité d'une huile, notée η, est un paramètre exprimé en kg·m^{-1}·s^{-1}, dont la connaissance est essentielle pour toute utilisation de cette huile.

Cet exercice propose un exemple de méthode de mesure de la valeur de la viscosité d'une huile de moteur Diesel du commerce.

Pour réaliser cette mesure, on utilise un « viscosimètre à chute de bille », constitué d'une éprouvette remplie d'huile de moteur dans laquelle est lâchée une bille métallique sphérique.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et la bille est lâchée sans vitesse initiale depuis la position $z = 0$.



Données :

- Rayon de la bille utilisée : $R = 1{,}1$ cm.
- Volume de la bille : $V = 5{,}6$ cm$^3 = 5{,}6 \times 10^{-6}$ m^3.
- Masse de la bille métallique : $m = 20{,}1$ g.
- Masse volumique de l'huile étudiée : $\rho_{huile} = 8{,}40 \times 10^2$ kg·m^{-3}.
- Intensité de la gravitation : $g = 9{,}8$ m·s^{-2}.

Les forces exercées sur la bille métallique sont :

- Le poids $\vec{P}$
- La poussée d'Archimède, notée $\overrightarrow{P_A}$, de même direction que le poids $\vec{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est $P_A = \rho_{huile} V g$, où ρ_{huile} est la masse volumique de l'huile.
- La force de frottement fluide exercée par l'huile sur la bille est notée $\vec{f}$. Elle est ici de même direction que le poids $\vec{P}$ et de sens opposé. Sa valeur est donnée par la relation $f = 6\pi\eta R v$, où v est la valeur de la vitesse de la bille, η est la viscosité de l'huile et *R* le rayon de la bille.

Q1. Faire un schéma des forces s'appliquant sur la bille.
Exprimer le poids de la bille en fonction de m et g puis calculer sa valeur.
Calculer de même la valeur de la poussée d'Archimède P_A et justifier que la bille d'acier tombe dans l'huile quand on la lâche en $z = 0$ avec une vitesse initiale nulle.

Q2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, établir la relation liant le vecteur accélération $\vec{a}$, les forces s'exerçant sur la bille $\vec{f}$, $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{P_A}$ et la masse m de cette bille.

Q3. On note v la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ comme la projection du vecteur vitesse $\vec{v}$ sur l'axe (Oz)**.** Montrer que v vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{6\pi\eta R v}{m} + g - \frac{\rho_{huile} V g}{m}.$$

En explicitant les valeurs numériques, on admet que v est solution de l'équation différentielle (E) suivante où $v(t)$ est exprimée en m·s^{-1} et t en s :

$$\text{(E)}: \quad \frac{dv}{dt} = -6{,}8\, v + 7{,}5.$$

Q4. Au début de l'expérience, la bille est introduite dans l'éprouvette avec une vitesse nulle. Démontrer que la solution v de cette équation sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant cette condition initiale est définie par :

$$v(t) = -\frac{75}{68}\mathrm{e}^{-6{,}8t} + \frac{75}{68}.$$

Q5. Déterminer la valeur exacte de $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$ notée v_{lim}, exprimée en m·s^{-1}.

Q6. On mesure expérimentalement une vitesse limite $v_{\mathrm{lim}} = 1{,}1$ m·s^{-1}.
On peut en déduire la valeur de la viscosité η par la relation suivante :

$$\eta = \frac{(m - \rho_{huile}\, V) g}{6\, \pi\, R\, v_{lim}}$$

Calculer cette valeur et comparer le résultat à la valeur $\eta = 0{,}66$ kg·m^{-1}·s^{-1} fournie par le fabricant.

EXERCICE 2 (6 points) (physique-chimie)

Aide au stationnement

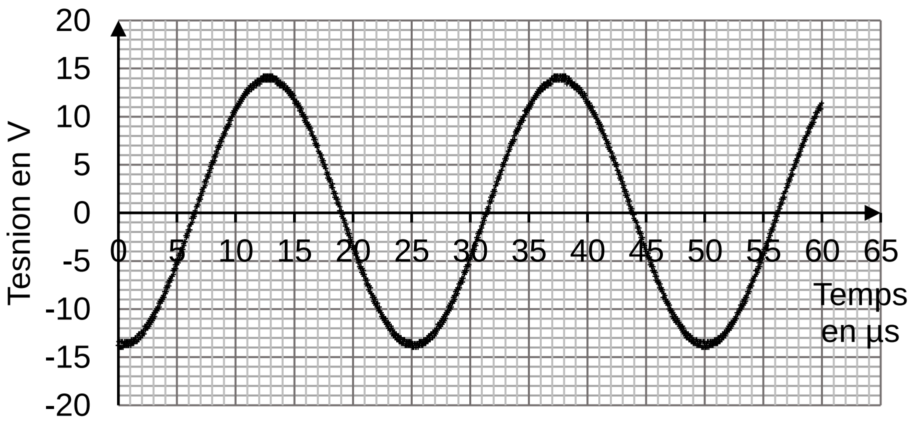
Les constructeurs automobiles proposent depuis plusieurs années des systèmes d'aide au stationnement ou de stationnement automatique qui reposent sur l'utilisation de capteurs à ultrasons.

Quelques caractéristiques des ultrasons

Q1. Parmi les propositions suivantes, indiquer sur votre copie celles qui sont exactes :

Affirmation A : les ondes ultrasonores sont des ondes électromagnétiques.
Affirmation B : les ondes ultrasonores sont des ondes mécaniques.
Affirmation C : les ondes ultrasonores peuvent se propager dans le vide.
Affirmation D : les ondes ultrasonores nécessitent la présence d'un milieu matériel pour se propager.

Le document 1, représente la tension mesurée à l'oscilloscope par un détecteur recevant le signal émis par un émetteur d'ultrasons :

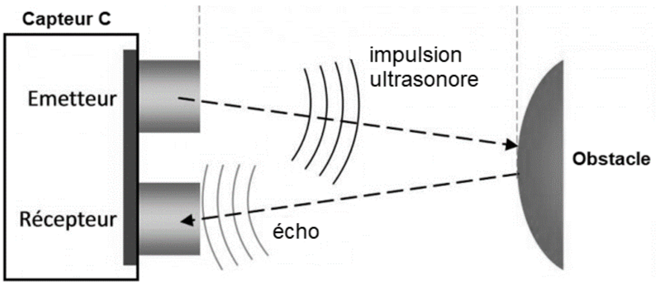


Document 1 – Tension mesurée (en V) en fonction du temps (en µs)

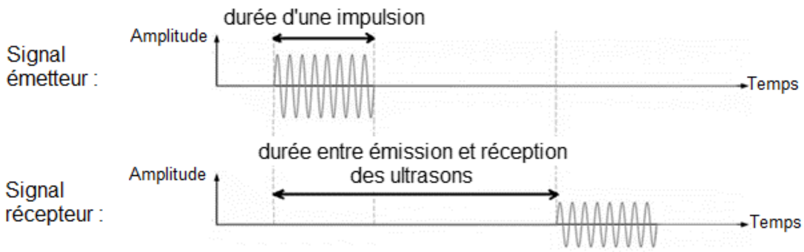
Q2. Déterminer la fréquence *f* des ultrasons émis, en kHz et expliquer pourquoi le signal produit par l'émetteur n'est pas audible.
Donnée : les ondes sonores audibles ont des fréquences comprises entre 20Hz et 20 kHz.

Utilisation des ultrasons pour déterminer une distance

Le capteur à ultrasons utilisé dans le système d'aide au stationnement est un capteur « combiné » qui contient un émetteur et un récepteur d'ondes ultrasonores. La distance entre le capteur et l'obstacle est déduite de la durée qui s'écoule entre l'émission d'une impulsion ultrasonore et la réception de son écho par le capteur, connaissant la vitesse de propagation des ultrasons dans l'air.

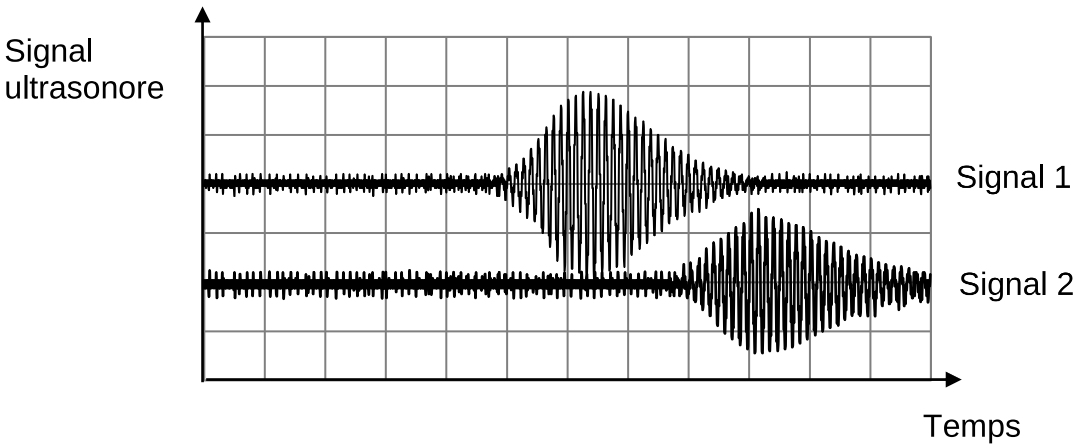


Document 1 – Schéma de principe d'un système d'aide au stationnement



Document 2 – Signaux émis et reçus par le système d'aide au stationnement.

Une modélisation au laboratoire du capteur, à l'aide d'un émetteur et d'un récepteur à ultrasons indépendants, a permis d'obtenir la copie d'écran d'oscilloscope suivante dans le cas d'un obstacle situé à une distance de 10 cm.



Document 3 – Tension mesurée (en V) en fonction du temps (en µs)
pour un émetteur ultrasons et pour un récepteur ultrasons indépendants.
La sensibilité verticale pour les deux voies est de 1 V/ div.
La sensibilité horizontale pour les deux voies est de 200 µs/div.

Q3. Indiquer, en donnant deux arguments, lequel des deux signaux (signal 1 ou signal 2) du document 3 est associé à l'onde réfléchie.

Q4. Le capteur combiné ne peut fonctionner correctement en récepteur que lorsqu'il a fini de fonctionner en émetteur. À l'aide du document 3, préciser si la durée d'impulsion utilisée dans l'expérience permettrait de détecter correctement un obstacle situé à une distance de 10 cm.

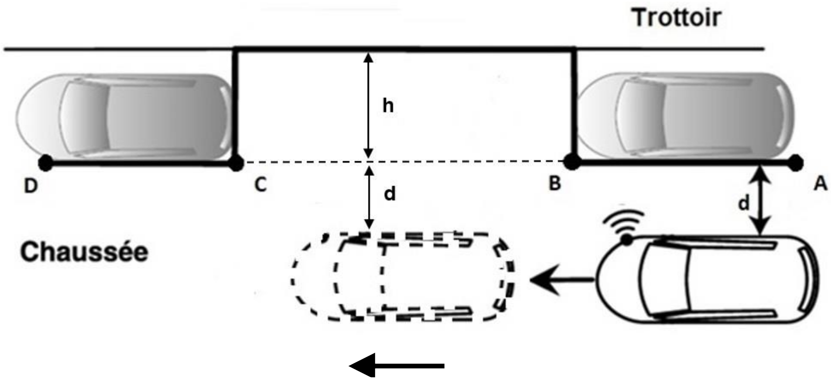
Principe de fonctionnement d'un système de stationnement automatique

Certains systèmes embarqués effectuent automatiquement la manœuvre de stationnement du véhicule, sans intervention du conducteur. Cela n'est possible qu'après une phase de mesure qui permet de déterminer si la taille de la place est compatible avec la manœuvre.

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">Dimensions minimales
de la place de stationnement</td></tr>
<tr><td>Longueur (en m)</td><td>5,1</td></tr>
<tr><td>Largeur (en m)</td><td>2,2</td></tr>
</table>

Document 4 – Dimensions de la place de stationnement

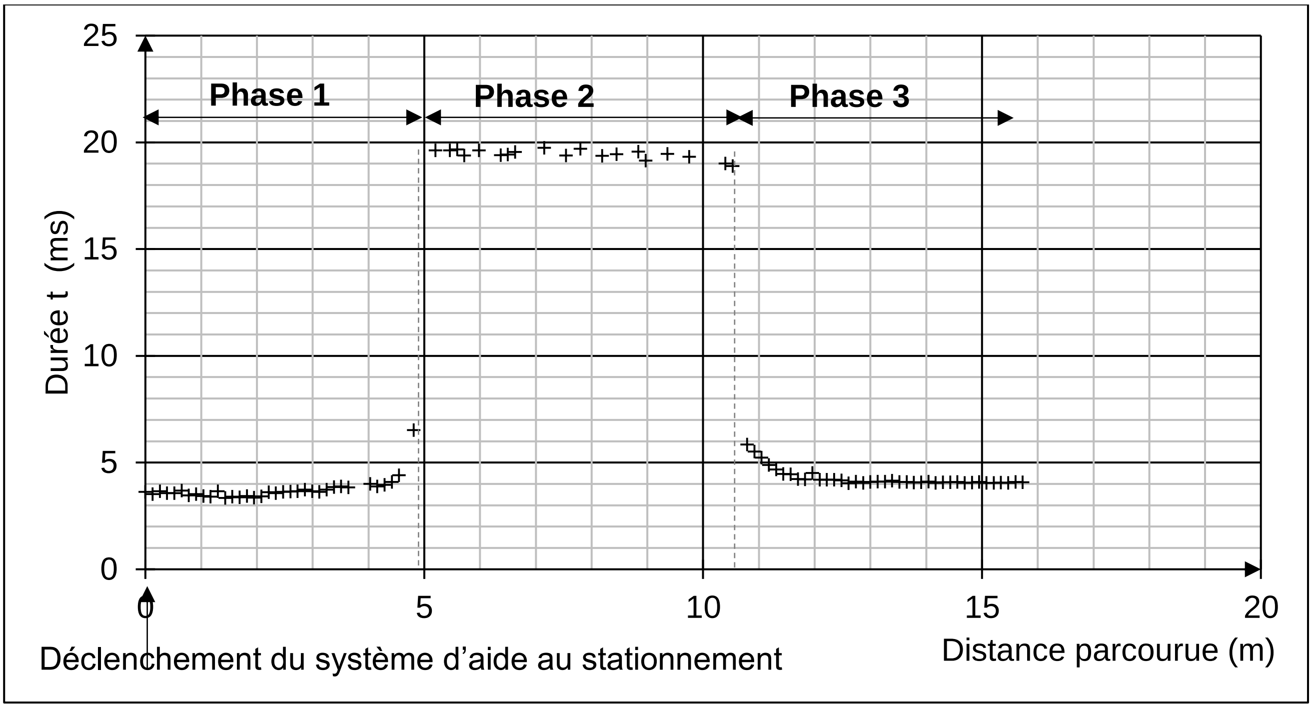
Lors de la phase de mesure, la voiture est parallèle au trottoir et se déplace vers l'avant à vitesse constante le long de la place libre.



sens de déplacement du véhicule

Document 5 – Schéma de principe du stationnement automatique

On a réalisé un dispositif modélisant ce système grâce à un microcontrôleur et un émetteur-récepteur à ultrasons que l'on a fixé sur une voiture se déplaçant comme indiqué sur le document 5.



Document 6 – Durée (en ms) des aller-retour des signaux ultrasonores émis par le capteur selon la position de la voiture lors du stationnement automatique.

Q5. Durant la phase 2 du mouvement de l'automobile indiquée sur le document 6, le capteur à ultrasons se trouve au niveau de la place disponible (entre les points B et C du document 5).
En utilisant le document 6, déterminer la durée de la phase 2 du mouvement de la voiture et en déduire la longueur de la place libre.
En vous aidant du tableau du document 4, indiquer si celle-ci permet le stationnement de la voiture.
Donnée : la voiture se déplace à la vitesse $v_0 = 1{,}3\ \text{m.s}^{-1}$.

La distance *d* indiquée sur le document 5 désigne la distance latérale par rapport aux véhicules déjà stationnés.

Q6. À l'aide du document 5 et du document 6, et sachant que la vitesse de propagation des ondes ultrasonores dans l'air est $c_{son} = 340\ \text{m·s}^{-1}$ montrer que la valeur de la distance *d* est comprise entre 0,6 m et 0,7 m.
Calculer la profondeur *h* de la place libre et, en vous aidant du tableau du document 4, indiquer si celle-ci permet le stationnement de la voiture.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie même si elle n'a pas abouti.

EXERCICE 3 (4 points) (mathématiques)

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres. Chacune d'elles est notée sur un point.

Question 1

Pour cette question, indiquer la lettre de la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée.

L'expression $\frac{(\mathrm{e}^{-3x})^2 \times (\mathrm{e}^{2x})^{-3}}{\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^{6x}}$ vaut :

A	B	C	D
e^{-1}	$\frac{12}{5}x^{-3}$	e^{-x}	e^{-23x}

Question 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}(-3x + 1)$. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}(-6x - 1)$.

Question 3

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Mettre le nombre complexe $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ sous forme exponentielle en détaillant les calculs.

Question 4

Résoudre sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'équation :

$$\frac{2}{3\ln(10)}\ln(x) - 2{,}88 = 4.$$

EXERCICE 4 (6 points) (physique-chimie)

Les boissons en randonnée

Conservation d'une boisson chaude

Dans la documentation fournie par un fabricant de bouteilles isothermes, on peut lire l'information suivante relative à un modèle donné : pour une température initiale de l'eau à 95 °C, la température vaut 82 °C au bout de 6 h et 73°C au bout de 12 h.

On place 1,0 L d'eau à la température θ_i = 95 °C dans l'une de ces bouteilles isothermes.

La température extérieure à la bouteille est θ_{ext} = 25 °C

Q1. Exprimer la variation de l'énergie interne, ΔU, de l'eau contenue dans la bouteille isotherme, au cours des 6 premières heures en fonction de : la masse de l'eau, m_{eau}, la capacité thermique massique de l'eau, c_{eau}, la température initiale de l'eau, θ_i, et la température de l'eau après 6h, θ_f. Montrer que ΔU est voisine de 54 kJ.

Données :
- Capacité thermique massique de l'eau : c_{eau} = 4,18 kJ·kg^{-1}·°C^{-1}
- Masse volumique de l'eau : ρ_{eau} = 1,0 kg·L^{-1} ;
- Température initiale θ_i = 95 °C ;
- Température finale après 6 h θ_f = 82 °C ;
- Volume de l'eau V = 1 L.

Q2. Définir le flux thermique à travers la paroi et montrer que le flux thermique moyen qui traverse la paroi de la bouteille au cours des 6 premières heures, Φ_{moyen}, est voisin de 2,5 W.

Au cours du refroidissement, le flux thermique entre l'eau et l'extérieur n'est pas constant. Il dépend de la différence de température $\Delta\theta$ entre l'intérieur et l'extérieur de la bouteille et de la résistance thermique R_{th} de ses parois :

$$\Phi = \frac{\Delta\theta}{R_{\mathrm{th}}}$$

Q3. Choisir sans calcul, parmi les trois propositions suivantes, la valeur du flux thermique à l'instant initial et justifier ce choix :

a. Φ_i = 3,6 W
b. Φ_i = 2,5 W
c. Φ_i = 1,8 W

En déduire que la valeur de la résistance thermique R_{th} des parois de la bouteille isotherme est voisine de 19 K·W^{-1} en prenant la température du liquide à l'intérieur égale à θ_{int} = 95°C et la température extérieure égale à θ_{ext} = 25°C.

Q4. Montrer que la paroi de la bouteille isotherme d'épaisseur e = 1,0 cm et de surface totale S = 0,098 m^2 a une conductivité thermique λ = 0,0052 W·m^{-1}·K^{-1}.

Donnée :
La relation liant la résistance thermique d'une paroi plane R_{th}, à sa surface S en m^2, à son épaisseur e en m, et à la conductivité thermique du matériau λ en W·m^{-1}·K^{-1} est la suivante :

$$R_{\mathrm{th}} = \frac{e}{\lambda \times S}$$

La documentation du fabricant indique que la bouteille est composée de 100 % d'acier inoxydable et qu'elle est munie de deux parois en inox séparées par un espace pratiquement vide.

Q5. Expliquer, sans calcul, l'intérêt du vide partiel entre les deux parois de la bouteille.

Approvisionnement en eau : les pastilles de purification

Il existe des comprimés effervescents qui permettent de purifier l'eau.
Le fabricant indique qu'il suffit d'ajouter un comprimé dans un litre d'eau non potable et d'attendre 30 minutes avant de la consommer.

Un comprimé de masse 50 mg contient 3,5 mg de dichloroisocyanurate de sodium (noté NaDCC), de l'hydrogénocarbonate de sodium et de l'acide adipique.

Q6. Déterminer la valeur de la quantité de matière n de NaDCC dans 1,0 L d'eau préparée en suivant les recommandations préconisées.

Donnée : masse molaire du NaDCC : M_{NaDCC} = 219,95 g·mol^{-1}.

Lorsque le comprimé entre en contact avec l'eau, une transformation chimique a lieu, produisant de l'acide hypochloreux de formule HOCl dont la molécule contient un élément Chlore, Cl. Au cours de cette transformation chimique, une mole de NaDCC libère ainsi deux moles d'élément chlore.

Q7. Calculer la masse d'élément chlore Cl qui se trouve dans 1,0 L d'eau à l'issue de son traitement à l'aide de la pastille effervescente.

Donnée : masse molaire du chlore M(Cl) = 35,5 g·mol^{-1}.

La teneur en chlore libre est définie par la masse en élément chlore par unité de volume. Pour assurer l'absence de prolifération microbiologique, il est recommandé, en France, de maintenir une teneur de chlore libre aux alentours de 0,1 mg/L en tous points du réseau (eau du robinet). L'OMS recommande une valeur maximale de chlore libre dans l'eau potable de 5 mg/L.

https://www.anses.fr/fr/system/files/RCCP2010sa0169.pdf

Q8. Préciser si l'eau purifiée avec un comprimé est potable.

CLASSE : Terminale STI2D	**EXERCICE 1 :** 4 points
VOIE : ☒ Générale	**ENSEIGNEMENT : Physique-chimie**
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h36	**CALCULATRICE AUTORISÉE :** ☒Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 1

Le viscosimètre à chute de bille

Q1.

$P = m \times g$
$P = 20{,}1 \times 10^{-3} \times 9{,}8$
$P = 0{,}20\ N$

$P_A = \rho_{huile} \times V \times g$
$P_A = 8{,}40 \times 10^2 \times 5{,}6 \times 10^{-6} \times 9{,}8$
$P_A = 0{,}046\ N$

Le poids est supérieur à la poussée d'Archimède. Ainsi la force qui attire la bille vers le bas est supérieure à celle qui la pousse vers le haut : quand on lâche la bille, en z=0, la bille tombe.

Q2.

Système : bille

Référentiel terrestre supposé galiléen.

D'après principe fondamental de la dynamique :

$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \overrightarrow{P_A} + \vec{f} = m\vec{a}$

Q3.

$\vec{P} + \overrightarrow{P_A} + \vec{f} = m\vec{a}$

$m\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{P_A} + \vec{f}$

Projetons sur l'axe z :

$ma = P - P_A - f$

Avec :

$a = \frac{dv}{dt}$

$P = mg$
$P_A = \rho_{huile} \times V \times g$
$f = 6\pi\eta Rv$

$m\frac{dv}{dt} = mg - \rho_{huile} \times V \times g - 6\pi\eta Rv$

On divise par m :

$$\frac{m}{m}\frac{dv}{dt} = \frac{m}{m}g - \frac{\rho_{huile} \times V \times g}{m} - \frac{6\pi\eta R v}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho_{huile} \times V \times g}{m} - \frac{6\pi\eta R v}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{6\pi\eta R v}{m} + g - \frac{\rho_{huile} \times V \times g}{m}$$

Q4.

$$\frac{dv}{dt} = -6{,}8v + 7{,}5$$

L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$

Les solutions sont de la forme : $y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$

$$y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$$

$$v(t) = Ce^{-6{,}8t} - \frac{7{,}5}{-6{,}8}$$

$$v(t) = Ce^{-6{,}8t} + \frac{75}{68}$$

Pour trouver C , on utilise les conditions initiales :

$$v(t=0) = Ce^{-6{,}8\times 0} + \frac{75}{68}$$

$$v(t=0) = C \times 1 + \frac{75}{68}$$

$$v(t=0) = C + \frac{75}{68}$$

Or $v(t=0) = 0$

Donc $C + \frac{75}{68} = 0$

$$C = -\frac{75}{68}$$

Ainsi :

$$v(t) = -\frac{75}{68}e^{-6{,}8t} + \frac{75}{68}$$

Q5.

$$v(t) = -\frac{75}{68}e^{-6,8t} + \frac{75}{68}$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{75}{68}e^{-6,8\times\infty} + \frac{75}{68}$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{75}{68}\times 0 + \frac{75}{68}$$

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{75}{68}$$

$$v_{lim} = \frac{75}{68}\ m.s^{-1}$$

Q6.

$$\eta = \frac{(m - \rho_{huile} \times V)g}{6\pi R v_{lim}}$$

$$\eta = \frac{(20,1 \times 10^{-3} - 8,40 \times 10^{2} \times 5,6 \times 10^{-6}) \times 9,8}{6\pi \times 1,1 \times 10^{-2} \times 1,1}$$

$$\eta = 0,66\ kg.m^{-1}.s^{-1}$$

La valeur trouvée est identique à celle fournie par le fabricant.

CLASSE : Terminale STI2D	**EXERCICE 2 :** 6 points
VOIE : ☒ Générale	**ENSEIGNEMENT : Physique-chimie**
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	**CALCULATRICE AUTORISÉE :** ☒Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 2

Aide au stationnement

Quelques caractéristiques des ultrasons

Q1.

Affirmation B : les ondes ultrasonores sont des ondes mécaniques.
Affirmation D : les ondes ultrasonores nécessitent la présence d'un milieu matériel pour se propager.

Q2.

Déterminons la période à l'aide du document 1 :

$2T = 50\ \mu s$

$T = \frac{50}{2}$

$T = 25\ \mu s$

Calculons la fréquence :

$f = \frac{1}{T}$

$f = \frac{1}{25 \times 10^{-6}}$

$f = 4{,}0 \times 10^{4} Hz$

$f = 40 \times 10^{3} Hz$

$f = 40\ kHz$

Donnée : les ondes sonores audibles ont des fréquences comprises entre 20Hz et 20 kHz.

La fréquence de 40 kHz est supérieure à 20 kHz : le son n'est pas audible.

Utilisation des ultrasons pour déterminer une distance

Q3.

L'onde réfléchie apparait après l'ondé émise.
De plus, l'intensité de l'onde réfléchie est plus faible que l'intensité de l'onde émise.
L'onde réfléchie est donc associée au signal 2.

Q4.

L'écran de l'oscilloscope est obtenu dans le cas d'un obstacle situé à une distance de 10 cm.
Nous remarquons que le signal 2 est reçu avant la fin de l'émission du signal 1.

Or d'après l'énoncé : « Le capteur combiné ne peut fonctionner correctement en récepteur que lorsqu'il a fini de fonctionner en émetteur »

La durée d'impulsion utilisée dans l'expérience ne permettrait pas de détecter correctement un obstacle situé à une distance de 10 cm.

Principe de fonctionnement d'un système de stationnement automatique

Q5.

Sur le Document 6 –durant la phase 2, la voiture parcours

$BC = 10{,}5 - 5 = 5{,}5\ \text{m}$

la longueur de la place libre est de 5,5 m.

Dimensions minimales de la place de stationnement	
Longueur (en m)	5,1
Largeur (en m)	2,2

La longueur minimale étant de 5,1 m : celle-ci permet donc le stationnement de la voiture.

Déterminons la durée de la phase 2 du mouvement de la voiture

$$v_0 = \frac{BC}{\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{BC}{v_0}$$

$$\Delta t = \frac{5{,}5}{1{,}3}$$

$$\Delta t = 4{,}2\ \text{s}$$

Q6.

Sur le Document 6 – Durée (en ms) correspond à des aller-retour des signaux

Phase 1 : $3{,}5\ \text{ms} < \Delta t_1 < 4{,}0\ \text{ms}$

$$c_{son} = \frac{2d}{\Delta t_1}$$

$$\frac{2d}{\Delta t_1} = c_{son}$$

$$d = \frac{c_{son} \times \Delta t_1}{2}$$

Pour $\Delta t_1 = 3{,}5\ \text{ms}$

$$d = \frac{340 \times 3{,}5 \times 10^{-3}}{2}$$

$$d = 0{,}6\ \text{m}$$

Pour $\Delta t_1 = 4{,}0\ \text{ms}$

$$d = \frac{340 \times 4{,}0 \times 10^{-3}}{2}$$

$$d = 0{,}7\ \text{m}$$

Phase 2 : $\Delta t_2 = 19{,}5 \text{ ms}$

$$c_{son} = \frac{2(d+h)}{\Delta t}$$

$$\frac{2(d+h)}{\Delta t} = c_{son}$$

$$d + h = \frac{c_{son} \times \Delta t}{2}$$

$$h = \frac{c_{son} \times \Delta t}{2} - d$$

$$h = \frac{340 \times 19{,}5 \times 10^{-3}}{2} - 0{,}6$$

$$h = 2{,}7 \text{ m}$$

La largeur d minimale est de 2,2m et la profondeur h de la place libre est de 2,7m. Ainsi, celle-ci permet le stationnement de la voiture.

Dimensions minimales de la place de stationnement	
Longueur (en m)	5,1
Largeur (en m)	2,2

STI2D - Métropole 2023

Exercice 3 -

Q1 rappels :

$$\begin{cases} e^2 \times e^3 = e^{2+3} = e^5 \\ \left(e^2\right)^3 = e^{2\times3} = e^6 \\ \dfrac{e^2}{e^3} = e^{2-3} = e^{-1}. \end{cases}$$

$$\frac{\left(e^{-3x}\right)^2 \times \left(e^{2x}\right)^{-3}}{e^{5x} \times e^{6x}} = \frac{e^{-6x} \times e^{-6x}}{e^{11x}}$$

$$= \frac{e^{-12x}}{e^{11x}} = e^{-12x-11x} = \boxed{e^{-23x} = D}$$

Q2 $f(x) = e^{2x}(-3x+1)$

→ $\left(e^{2x}\right)$ est de la forme e^u avec

$u(x) = 2x$

$u'(x) = 2.$

$\left(e^u\right)' = u' \times e^u$

donc $\boxed{\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}}$

→ f est de la forme $u \times v$ avec

$u(x) = e^{2x}$ | $v(x) = -3x + 1$

$u'(x) = 2e^{2x}$ | $v'(x) = -3$

$(u \times v)' = u'v + uv'$

$f'(x) = 2e^{2x} \times (-3x+1) + e^{2x} \times (-3)$

$f'(x) = e^{2x} \left(2(-3x+1) - 3 \right)$

$f'(x) = e^{2x} (-6x + 2 - 3)$

$\boxed{f'(x) = e^{2x} (-6x - 1)}$

Q3. $z = \sqrt{3} + i = \rho e^{i\theta}$

$\rightarrow \rho = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = \boxed{2 = |z|}$

$\rightarrow \left. \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{array} \right\} \theta = \dfrac{\pi}{6}$ rad

$\boxed{z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$

STI2D Métropole 2023

Exercice 3.

Q4. $\frac{2}{3\ln(10)} \ln x - 2{,}88 = 4.$

$$\frac{2}{3\ln(10)} \times \ln x = 4 + 2{,}88$$

$$\frac{2}{3\ln 10} \times \ln x = 6{,}88.$$

$$\ln x = \frac{6{,}88}{\frac{2}{3\ln 10}}$$

$$\ln x = \frac{6{,}88 \times \ln 10 \times 3}{2}$$

$$\ln x = 10{,}32 \times \ln 10.$$

$$\underline{\ln} x = \underline{\ln} 10^{10{,}32}$$

$$\boxed{x = 10^{10{,}32}}$$

CLASSE : Terminale STI2D	**EXERCICE 4 :** 6 points
VOIE : ☒ Générale	**ENSEIGNEMENT : Physique-chimie**
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	**CALCULATRICE AUTORISÉE :** ☒Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 4

Aide au stationnement

Q1.

$\Delta U = m_{eau} \times c_{eau} \times (\theta_f - \theta_i)$

Avec $m_{eau} = \rho_{eau} \times V$

$\Delta U = \rho_{eau} \times V \times c_{eau} \times (\theta_f - \theta_i)$

$\Delta U = 1{,}0 \times 1 \times 4{,}18 \times 10^3 \times (82 - 95)$

$\Delta U = -5{,}4 \times 10^4 J$

$\Delta U = -54\ kJ$

Remarque : le signe négatif indique une perte d'énergie.

Q2.

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t}$$

$$\Phi = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$$\Phi_{moyen} = \frac{54 \times 10^3}{6 \times 60 \times 60}$$

$\Phi_{moyen} = 2{,}5\ W$

Q3.

$$\Phi = \frac{\Delta\theta}{R_{th}}$$

à l'instant initial la température de l'eau est maximale donc la différence de température $\Delta\theta$ avec l'extérieur est maximale.
Or le flux Φ est proportionnel à $\Delta\theta$. Ainsi, à l'instant initial Φ est maximal : choix a. Φi = 3,6 W.

Q4.

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda \times S}$$

$$\lambda \times S = \frac{e}{R_{th}}$$

$$\lambda = \frac{e}{R_{th} \times S}$$

$$\lambda = \frac{1{,}0 \times 10^{-2}}{19 \times 0{,}098}$$

$$\lambda = 0{,}0054\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$$

Q5.

Le vide ne permet pas la conductivité : c'est un excellent isolant thermique.
Ainsi, le vide partiel entre les deux parois de la bouteille permet d'augmenter la résistance de la bouteille et allonger la durée pour que le liquide se refroidisse.

Approvisionnement en eau : les pastilles de purification

Q6.

D'après l'énoncé : « Le fabricant indique qu'il suffit d'ajouter un comprimé dans un litre d'eau non potable et d'attendre 30 minutes avant de la consommer. »
Ainsi, la quantité de matière n de NaDCC dans 1,0 L d'eau préparée en suivant les recommandations préconisées est celle contenue dans un comprimé.
Or Un comprimé de masse 50 mg contient 3,5 mg de dichloroisocyanurate de sodium
(noté NaDCC) :

$$n_{NaDCC} = \frac{m_{NaDCC}}{M_{NaDCC}}$$

$$n_{NaDCC} = \frac{3{,}5 \times 10^{-3}}{219{,}95}$$

$$n_{NaDCC} = 1{,}6 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol}$$

Q7.

D'après l'énoncé : « Au cours de cette transformation chimique, une mole de NaDCC libère ainsi deux moles d'élément chlore. »

1 mole de NaDCC	2 moles d'élément chlore
$n_{NaDCC} = 1{,}6 \times 10^{-5}$ mol	n_{Cl}

$$n_{Cl} = \frac{1{,}6 \times 10^{-5} \times 2}{1}$$

$$n_{Cl} = 3{,}2 \times 10^{-5}\ \mathrm{mol}$$

Or

$$n_{Cl} = \frac{m_{Cl}}{M_{Cl}}$$

$$\frac{m_{Cl}}{M_{Cl}} = n_{Cl}$$

$$m_{Cl} = n_{Cl} \times M_{Cl}$$

$$m_{Cl} = 3{,}2 \times 10^{-5} \times 35{,}5$$

$$m_{Cl} = 1{,}1 \times 10^{-3}\ \mathrm{g}$$

$$m_{Cl} = 1{,}1\ \mathrm{mg}$$

Q8.

La teneur en chlore libre est définie par la masse en élément chlore par unité de volume :

$$t = \frac{m_{Cl}}{V}$$

$$t = \frac{1,1}{1,0}$$

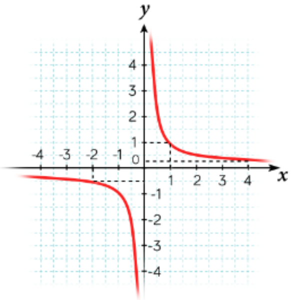
$$t = 1,1\ mg.L^{-1}$$

Pour assurer l’absence de prolifération microbiologique, il est recommandé, en France, de maintenir une teneur de chlore libre aux alentours de 0,1 mg/L en tous points du réseau (eau du robinet). L’OMS recommande une valeur maximale de chlore libre dans l’eau potable de 5 mg/L.

La teneur est supérieure à 0,1 mg/L et inférieure à 5 mg/L : l’eau purifiée avec un comprimé est donc potable.

Fiche de révision : Chapitre 1

1. Fonction Inverse :

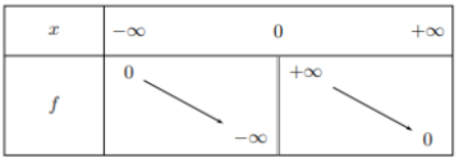


La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel non nul x associe son inverse, le réel $\frac{1}{x}$

$$f :]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[\to\mathbb{R}\,,\, x\to\frac{1}{x} \text{ ou bien } f(x)=\frac{1}{x},\ \forall x\neq 0$$

Son ensemble de définition est $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
La valeur zéro est appelée une valeur interdite car 0 n'a pas d'image par la fonction inverse.

Tableau de variation de la fonction : $f(x)=\frac{1}{x}$



Dérivée de la fonction inverse
La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ et on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

2. Limites :

Propriété : Comportement aux infinis
• Soit x un nombre réel positif, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ • Soit x un nombre réel négatif, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

Propriété : Comportement autour de zéro
• Soit x un nombre réel positif, on a $\lim\limits_{x\to0,\,x>0}\frac{1}{x}=+\infty$ • Soit x un nombre réel négatif, on a $\lim\limits_{x\to0,\,x<0}\frac{1}{x}=-\infty$

3. Définition dérivée :

Définition : nombre dérivé
Le nombre dérivé en un point $x=a$ est défini comme étant le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point $x=a$. Il est noté $f'(a)$.

4. Formules de dérivées :

Fonction	Dérivée
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax+b$	a
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$

Fonction		Dérivée
Somme $f=u+v$		$f'=u'+v'$
Produit	$f=ku$	$f'=ku'$
	$f=uv$	$f'=u'v+uv'$
	$f=u^n$	$f'=n\times u'\times u^{n-1}$
Quotient	$f=\frac{1}{v}$	$f'=-\frac{v'}{v^2}$
	$f=\frac{u}{v}$	$f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
Racine	$f=\sqrt{u}$	$f'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

5. Fonctions affines :

Coefficient directeur m

Le nombre m s'appelle le **coefficient directeur** de la fonction f.

Exemple :

Le coefficient directeur de $f(x)=-4x-1$ est égal à -4.

Formule de calcul :

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Essentiel cours Chapitre II : Fonction exponentielle de base a

Définition par récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Expression de manière explicite :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Propriétés algébriques :

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{nx} = (a^x)^n$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Propriété sens de variation :

Si 0 < a < 1, la fonction x →a^x est strictement décroissante sur R

Si a=1, la fonction x →a^x=1^x=1 est croissante sur R

Si a > 1, la fonction x →a^x est strictement croissante sur R

Propriété : sens de variation de x→ka^x

Si k > 0, la fonction x→ka^x a le même sens de variation que la fonction x→a^x

Si k < 0, la fonction x→ka^x a le sens de variation contraire à celui de la fonction x→a^x

Définition coefficient multiplicateur :

$$V_A = CM \times V_D$$

Propriété taux moyen d'évolution :

$$t = 100\left(CMG^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

<u>Essentiel de cours Chapitre III : Fonction exponentielle de base e</u>

Propriétés algébriques :

Pour tous réels *x* et *y* et tout entier *n*, on a :

$e^x \times e^y = e^{x+y}$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

$e^{nx} = (e^n)^x$

Remarque : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$; $e \approx 2{,}71828$

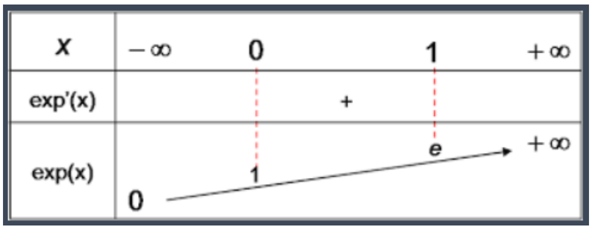
Théorème des dérivées :

La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, f$ $(x) = e^x$

Soit k un nombre réel. La fonction $f(x) = e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = ke^{kx}$

Propriété sens de variation :

La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $k > 0$, la fonction $f(x) = e^{kx}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $k < 0$, la fonction $f(x) = e^{kx}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Propriété, limite de la fonction exponentielle :

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- $Si\ k > 0,$ $\lim_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} e^{kx} = +\infty$
- $Si\ k < 0,$ $\lim_{x \to \_-\infty} e^{kx} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} e^{kx} = 0$

Propriété, croissance comparée :

- Pour tout entier *n*, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ Pour tout entier *n*, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
- Si $k > 0,$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} x^n \times e^{-kx} = 0$

Propriété, FI (Forme Indéterminée) :

$\frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$

$0 \times \infty$

$\frac{0}{0}$

Essentiel de cours chapitre IV : suites numériques

Suites arithmétiques

Soit (un) une suite arithmétique de terme initial u0 et de raison r

Définition par récurrence : un+1=un+r

Définition de manière explicite ou un en fonction de n, de terme initial u0 : un=u0+nr

Définition de manière explicite ou un en fonction de n, de terme initial u1 : un=u1+(n-1)r

Somme des termes : Sn=u0+u1+....+un : Sn=nombre termes x (terme initial + terme final)/2

Moyenne arithmétique de deux nombres : x=a+b/2

Suites géométriques

Soit (un) une suite géométrique de terme initial u0 et de raison q

Définition par récurrence : un+1=un x q

Définition de manière explicite ou un en fonction de n, de terme initial u0 : un=u0 x q puissance n

Définition de manière explicite ou un en fonction de n, de terme initial u1 : un=u1 x q puissance n-1

Somme des termes : Sn=u0+u1+....+un : Sn=terme initial x 1-q puissance nombre termes/1-q

Moyenne géométrique de deux nombres : x= racine ab

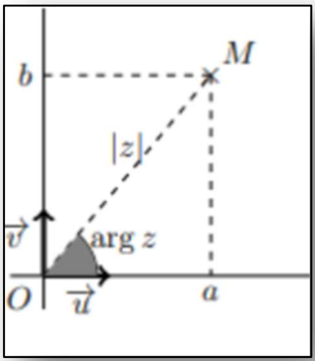
Essentiel de cours - *Chapitre V : nombres complexes*

$i^2 = -1$

Forme algébrique :

$z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels

Conjugué : $\overline{z} = a - ib$



Forme trigonométrique :

$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$

Avec :

- Le module : r = $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- L'argument : arg(z) =>
  - $cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$
  - $sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ⇔ θ = ...

Propriétés de calcul :

$$cos(\theta + \theta') = cos\,\theta\,cos\theta' - sin\theta\,sin\theta'$$
$$sin(\theta + \theta') = sin\,\theta\,cos\theta' + cos\theta\,sin\theta'$$
$$cos(\theta - \theta') = cos\,\theta\,cos\theta' + sin\theta\,sin\theta'$$
$$sin(\theta - \theta') = sin\,\theta\,cos\theta' - cos\theta\,sin\theta'$$

Forme exponentielle :

$z = r\,e^{i\theta}$ avec $e^{i\theta} = cos\theta + i\,sin\theta$

Propriétés : vecteurs et distance

Soient A le point d'affixe z_A et B le point d'affixe z_B, alors :

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $\vec{AB}(z_B - z_A)$
- $AB = |z_B - z_A|$

Fonction Logarithme Népérien - Cours STi2D

1. Définition

Le logarithme népérien, noté ln(x), est la fonction réciproque de l'exponentielle de base e.

Ainsi, si y = ln(x), alors e^y = x.

Domaine de définition : ln(x) est défini pour :]0,+∞[.

Formule :

1. Propriétés Algébriques :

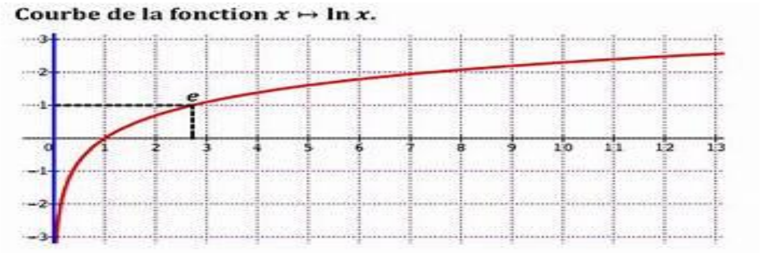
- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$

-$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

-$\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$

2. Valeurs particulières :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(e^a) = a$



Courbe Représentative :

- Passe par le point (1,0) car ln(1) = 0.
- Strictement croissante sur]0, +∞[.
- Admet une asymptote verticale en x = 0.

x	0	1	e	+∞
ln'(x)		+		
lnx	−∞	0	1	+∞
signe de lnx	-	0	+	

- La dérivée de la fonction ln ;

$\ln(x)' = \frac{1}{x}$

Essentiel de cours Chapitre VII : Logarithmes Décimaux

Définition :

$f(x) = \log(x)$

Lien avec LN :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Propriété algébriques :

- $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$
- $\log(a^n) = n \times \log(a)$
- $\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log(a)$
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
log	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Tableau de signe :

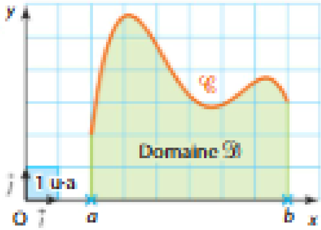
x	0		1		$+\infty$
$\log(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Propriété :

- $\log(10^x) = x$
- $10^{\log(x)} = x$
- $a = b \rightarrow \log(a) = \log(b) \rightarrow 10^a = 10^b$
- $a \geq b \rightarrow \log(a) \geq \log(b) \rightarrow 10^a \geq 10^b$

Chapitre VIII : Intégration

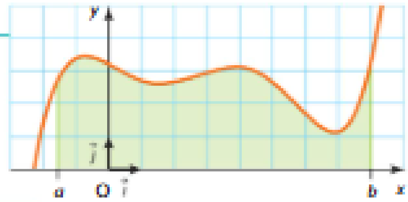
1 Intégrale d'une fonction positive



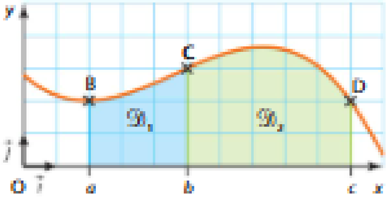
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, l'intégrale de a à b de la fonction positive f, est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire (u.a.).
- Si F est une primitive de la fonction f sur $[a\,;b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

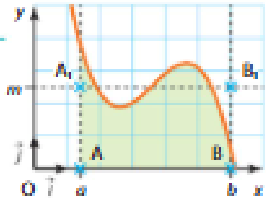
2 Propriétés de l'intégrale



- Si f est positive sur $[a\,;b]$ avec $a < b$ alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b (kf(x))\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$



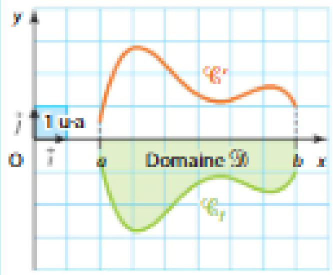
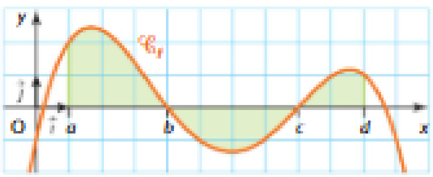
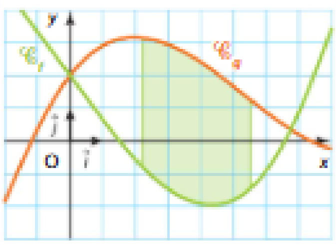
3 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle



- Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$. La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

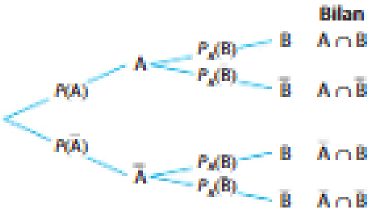
4 Calculs d'aires

		
$A = \int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$	$A = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$ si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a\,;b]$.

Chapitre IX : Probabilités conditionnelles

1 Probabilités conditionnelles et arbre de probabilités

- **Arbre de probabilités** : schéma permettant de résumer une situation aléatoire.



- **Branche** : segment reliant deux événements, auquel on associe une probabilité.
- **Nœud** : croisement entre plusieurs branches.
- **Chemin** : succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre.
- **Événement bilan** : événement à l'extrémité d'un chemin, qui est l'intersection de tous les événements constituant le chemin.
- La **somme des probabilités** des branches **issues d'un même nœud** est égale à 1.
- Sur la branche de A à B, on place $P_A(B)$, la **probabilité conditionnelle** de B sachant A.
- La **probabilité d'un chemin** est le **produit** des probabilités des branches qui le composent.
- La **probabilité d'un événement** est la **somme** des probabilités des chemins menant à cet événement (**formule des probabilités totales**).

En particulier :

- $P(A)+P(\overline{A})=1$
- $P(A \cap B)=P(A)\times P_A(B)$
- $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$

2 Indépendance de deux événements

- Lorsque $P(A)\neq 0$, **B est indépendant de A** si $P_A(B)=P(B)$.
- Lorsque $P(B)\neq 0$, **A est indépendant de B** si $P_B(A)=P(A)$.
- **A et B sont indépendants** si B est indépendant de A et A est indépendant de B.
- Lorsque $P(A)\neq 0$ **et** $P(B)\neq 0$, A et B sont **indépendants** si et seulement si l'une des égalités ci-dessous est satisfaite :

$$P_A(B)=P(B)$$
$$P_B(A)=P(A)$$

- Sans supposer $P(A)\neq 0$ ou $P(B)\neq 0$, **l'indépendance de A et B** peut se prouver par la formule :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B).$$

Chapitre X : Equations différentielles

1 Généralités

- Une **équation différentielle du premier ordre** est de la forme $y' + ay = 0$ ou $y' + ay = b$, où y et y' sont des fonctions définies et dérivables pour tout réel x et a, b réels non nuls.

- Les **fonctions solutions** f de ces équations différentielles sont définies et dérivables sur un intervalle I.
Ce sont des fonctions **exponentielles**.

- Une fonction donnée f est **solution d'une équation différentielle** si, en remplaçant y par l'expression de f, les dérivées de y (y', y''...) par les expressions dérivées de f (f', f''...), l'égalité définissant l'équation différentielle est vraie.

Exemple • La fonction $f(x) = -4e^{2x}$ de dérivée $f'(x) = -8e^{2x}$ vérifie l'équation :

$$y' - 2y = 0.$$

2 Équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$

- Les **fonctions f solutions** de l'équation $y' + ay = 0$ sont de la forme $f(x) = ke^{-ax}$ avec k constante réelle.

- Il existe une **unique fonction f solution** de cette équation quand elle **vérifie une condition initiale** $f(x_0) = y_0$.

Exemple • L'équation $y' - \frac{5}{2}y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = ke^{\frac{5}{2}x}$.

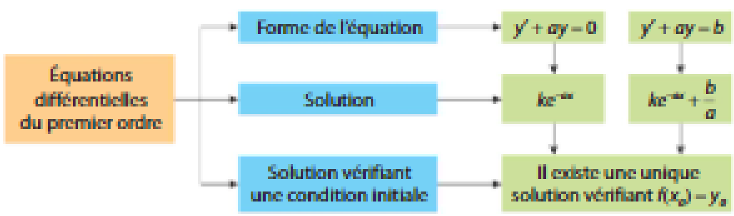
3 Équation différentielle de la forme $y' + ay = b$

- Les **fonctions f solutions** de l'équation $y' + ay = b$ sont de la forme $f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$ avec k constante réelle.

- Il existe une **unique fonction f solution** de cette équation **vérifiant une condition initiale** $f(x_0) = y_0$.

Exemple • Les solutions de l'équation $y' + 3y = 2$ sont les fonctions $f(x) = ke^{-3x} + \frac{2}{3}$.

Bilan



Chapitre XI : Variables aléatoires

1 Espérance d'une variable aléatoire

- L'**espérance** d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs qu'elle prend si on réalise un grand nombre de fois l'expérience aléatoire. Elle se calcule avec la formule :

$$E(X)=x_1\times P(X=x_1)+x_2\times P(X=x_2)+\ldots+x_k\times P(X=x_k)=\sum_{i=1}^{k}x_i\times P(X=x_i)$$

où x_1, x_2, …, x_k sont les valeurs prises par X.

2 Coefficients binomiaux

- Le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins associés à l'événement $\{X=k\}$ dans l'arbre décrivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, et où X est la variable aléatoire associée au nombre de succès.
- $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n ».
- En particulier, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \text{ et } \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

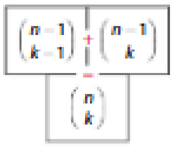
- Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

- Ces formules permettent de définir le **triangle de Pascal** : il s'agit d'un tableau en forme de triangle tel que les éléments de la ligne n sont les coefficients binomiaux $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ dans cet ordre.

La première et la dernière case de chaque ligne sont complétées avec des 1, d'après la propriété $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.

Les autres cases sont complétées grâce à la formule $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.



Jusqu'à $n=4$ on obtient ainsi :

$n=0$	1				
$n=1$	1	1			
$n=2$	1	2	1		
$n=3$	1	3	3	1	
$n=4$	1	4	6	4	1

3 Loi binomiale

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli de n épreuves, pour lequel la probabilité de succès dans chaque épreuve de Bernoulli est p.

- La loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p** et notée $\mathcal{B}(n\,;p)$.

- Pour tout nombre entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\times(1-p)^{n-k}$$

- L'espérance de X est :

$$E(X)=n\times p.$$

Chapitre XII : Composition de fonctions

1 Composée de deux fonctions

- Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions. u est définie sur l'intervalle I et pour tout x de I, $u(x)$ est élément de J ; v est définie sur l'intervalle J. On note $v \circ u$ la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v[u(x)]$.
- $v \circ u$ est appelée **fonction composée** de u par v. On dit aussi « u suivie de v » pour $v \circ u$ car la fonction u écrite en dernier s'applique bien en premier.
- $\mathrm{I} \mapsto \mathrm{J} \mapsto \mathbb{R}$

  $x \mapsto u(x) \mapsto v[u(x)] = v \circ u(x)$

Remarque : on peut parfois composer dans l'autre sens mais, en général $u \circ v \neq v \circ u$.

2 Fonction dérivée de la composée de deux fonctions

- Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que pour tout réel x de I, $u(x)$ soit un élément de J.

Alors la **fonction $v \circ u$ est dérivable** sur I et on a :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u).$$

3 Dérivées des fonctions composées usuelles

- Soit u une fonction définie sur un intervalle I et strictement positive sur un intervalle J. On a :

Fonction	u^n	$\cos(u)$	$\sin(u)$	e^u	$\ln(u)$
Intervalle	I	I	I	I	J
Dérivée	$nu'u^{n-1}$	$-u'\sin(u)$	$u'\cos(u)$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

4 Primitive de $u'f(u)$

- Soit u et f deux fonctions telles que $f \circ u$ soit définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si F est une primitive de f alors $F(u)$ est une **primitive** de la fonction $u'f(u)$.

- Soit a et b deux réels avec a non nul. Les primitives de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ définie sur l'intervalle I sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ où C est une constante réelle (rappel : si une fonction admet une primitive, alors elle en admet une infinité ; la constante C est alors déterminé par y_0, la valeur prise par la fonction en x_0).
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, strictement positive sur un intervalle J, et n un entier relatif différent de -1. On a :

Fonction	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'\cos(u)$	$u'\sin(u)$
Intervalle	I	J	I	I	I
Primitive	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$	$\ln(u)+C$	e^u+C	$\sin(u)+C$	$-\cos(u)+C$

Chapitre XIII : Nombres complexes – Partie II

1 Écriture exponentielle d'un nombre complexe

- Formule d'Euler : pour tout nombre réel θ,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

- Une **écriture exponentielle d'un nombre complexe** z non nul est $re^{i\theta}$ où r est le module de z et θ un de ses arguments.

- Soit θ et θ' deux nombres réels et n un entier naturel :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

2 Applications aux fonctions trigonométriques

Soit θ et θ' deux nombres réels.

- **Addition**

$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$

$\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta$

- **Soustraction**

$\cos(\theta-\theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$

$\sin(\theta-\theta') = \sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta$

- **Duplication**

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

- **Linéarisation**

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$ $\quad$ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$

- **Application aux calculs de primitives**

Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \cos^2 x$ est $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

Une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \sin^2 x$ est $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

3 Expression complexe de transformations du plan

- On considère la **translation** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.

Le point M d'affixe z a pour image par cette translation le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = z + b$.

- On considère la **rotation** de centre O (origine du repère) et d'angle θ.

Le point M d'affixe z a pour image par cette rotation le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\theta}z$.

- On considère l'**homothétie** de centre O et de rapport k non nul. Le point M d'affixe z a pour image par cette homothétie le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = k \times z$.