Espace *Fonctions continues*	**Contrôle de mathématiques n°8 – 1h** Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé

<u>**Exercice 1**</u> : (7 pts) Calculer les intégrales suivantes, en utilisant la méthode adéquate :

a) $\int_{-1}^{3}(3x^2 - 4x + 7)dx$ b) $\int_{2}^{4} \frac{5x}{x^2-1}\, dx$ c) $\int_{0}^{2}(2t + 3)e^{-3t}dt$

<u>**Exercice 2 :**</u> (4 pts)

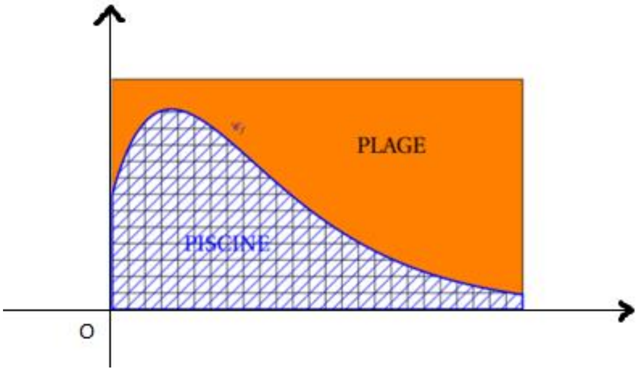
Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable.
Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la « plage » se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
La bordure est modélisée par la fonction f définie sur [0 ; 25] par :

$$f(x) = (5x + 7)e^{-0,2x}$$

1. Démontrer que la fonction $F(x) = -(25x + 160)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur [0 ; 25].
2. Quelle est l'aire en m^2 de la zone hachurée représentant la piscine ? Justifier et donner une valeur approchée au dixième.

L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie.

3. Quelle notion du chapitre sur les intégrales permet de calculer cette largeur ?
   Puis calculer la valeur numérique arrondie au dixième.



<u>**Exercice 3 :**</u> (5 pts)

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1. On admet qu'une primitive de la fonction $f(x) = xe^{1-x}$ est $F(x) = (-1 - x)e^{1-x}$.
   Calculer la valeur exacte de I_1.
2. On admet que la suite (I_n) vérifie : $I_{n+1} = (n + 1) \times I_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   Utiliser cette égalité pour calculer I_2.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

<u>**Exercice 4**</u> : (4 pts) On considère un jeu en deux parties :

- La 1ère partie consiste à lancer une pièce de monnaie équilibrée. Si on tombe sur « pile », on gagne 3€ et si on tombe sur « face », on gagne 4€.
- La 2e partie consiste à lancer un dé virtuel équilibré à 3 faces. Si on tombe sur « 1 », on gagne 1€, si on tombe sur « 2 », on gagne 2€ et si on tombe sur « 3 » on perd 5€.

On considère X et Y les variables aléatoires égales au gain du joueur respectivement lors de la 1e partie et de la 2e partie.

a) Etablir les lois de probabilités des deux variables aléatoires X et Y.
b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $S = X + Y$ donnant le gain cumulé à la fin des deux parties.
   Interpréter ce résultat.