



Espace Fonctions continues	Corrigé du Contrôle de mathématiques n°8 – 1h Avec calculatrice	Nom : Classe : TSpé
-------------------------------	---	------------------------

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes, en utilisant la méthode adéquate :

a) $\int_{-1}^3 (3x^2 - 4x + 7)dx$ b) $\int_2^4 \frac{5x}{x^2-1} dx$ c) $\int_0^2 (2t + 3)e^{-3t} dt$

a) $\int_{-1}^3 (3x^2 - 4x + 7)dx = [x^3 - 2x^2 + 7x]_{-1}^3$
 $= 3^3 - 2 \times 3^2 + 7 \times 3 - ((-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + 7 \times (-1)) = 40$

b) $\int_2^4 \frac{5x}{x^2-1} dx = \int_2^4 \frac{5}{2} \times \frac{2x}{x^2-1} dx$
 $= \frac{5}{2} \int_2^4 \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{5}{2} [\ln|x^2-1|]_2^4 = \frac{5}{2} (\ln 15 - \ln 3) = \frac{5}{2} \ln\left(\frac{15}{3}\right) = \frac{5}{2} \ln 5$

c) $\int_0^2 (2t + 3)e^{-3t} dt = \int_0^2 u(t) \times v'(t) dt$

On pose $\begin{cases} u(t) = 2t + 3 \\ v'(t) = e^{-3t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0 ; 2]$ et leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[0 ; 2]$

$$\int_0^2 (2t + 3)e^{-3t} dt = [(2t + 3) \times \left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)]_0^2 - \int_0^2 2 \times \left(-\frac{1}{3}e^{-3t}\right) dt = \left(-\frac{7}{3}e^{-6} + 1\right) + \frac{2}{3} \int_0^2 e^{-3t} dt$$

Or $\int_0^2 e^{-3t} dt = \left[-\frac{1}{3}e^{-3t}\right]_0^2 = -\frac{1}{3}e^{-6} + \frac{1}{3}$

Donc $\int_0^2 (2t + 1)e^{-3t} dt = -\frac{7}{3}e^{-6} + 1 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-6} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{23}{9}e^{-6} + \frac{11}{9}$

Exercice 2 :

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable.

Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la « plage » se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

La bordure est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; 25]$ par :

$$f(x) = (5x + 7)e^{-0,2x}$$

1. Démontrer que la fonction $F(x) = -(25x + 160)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0 ; 25]$.

On dérive la fonction F : $F(x) = -(25x + 160)e^{-0,2x} = uv$

Avec $\begin{cases} u(x) = -(25x + 160) \\ v(x) = e^{-0,2x} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = -25 \\ v'(x) = -0,2e^{-0,2x} \end{cases}$

On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$

$$F'(x) = -25e^{-0,2x} - (25x + 160) \times (-0,2e^{-0,2x}) = -25e^{-0,2x} + 5xe^{-0,2x} + 32e^{-0,2x}$$



$$F'(x) = 5xe^{-0,2x} + 7e^{-0,2x} = (5x + 7)e^{-0,2x} = f(x)$$

Par conséquent F est bien une primitive de f

2. Quelle est l'aire en m^2 de la zone hachurée représentant la piscine ? Justifier et donner une valeur approchée au dixième.

Comme la fonction f est continue (car composée de fonction continues) et positive sur $[0 ; 25]$, alors

$$A(\text{zone hachurée}) = \int_0^{25} f(x) dx = [F(x)]_0^{25} = [-(25x + 160)e^{-0,2x}]_0^{25}$$

$$= (-(25 \times 25 + 160)e^{-0,2 \times 25}) - (-(25 \times 0 + 160)e^{-0,2 \times 0}) = -785e^{-5} + 160 \approx 154,7 m^2$$

L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie.

3. Quelle notion du chapitre sur les intégrales permet de calculer cette largeur ?
Puis calculer la valeur numérique arrondie au dixième.

La largeur du rectangle correspond à la valeur moyenne de la fonction sur $[0 ; 25]$.

$$m = \frac{1}{25 - 0} \int_0^{25} f(x) dx = \frac{1}{25} \times (-785e^{-5} + 160) \approx 6,2m$$

Exercice 3 :

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1. On admet qu'une primitive de la fonction $f(x) = xe^{1-x}$ est $F(x) = (-1 - x)e^{1-x}$.
Calculer la valeur exacte de I_1 .

$$I_1 = \int_0^1 xe^{1-x} dx = [(-1 - x)e^{1-x}]_0^1 = -2e^0 + e = -2 + e$$

2. On admet que la suite (I_n) vérifie : $I_{n+1} = (n + 1) \times I_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Utiliser cette égalité pour calculer I_2 .

$$I_2 = (1 + 1)I_1 - 1 = 2I_1 - 1 = 2(-2 + e) - 1 = -5 + 2e$$

3. Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

On a : $0 \leq x \leq 1$ donc $1 = e^0 \leq e^x \leq e^1$ car la fonction exp est croissante

On prend l'image par la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $0 \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{e^x} \leq 1$

On multiplie par $x^n e$ positif, donc : $0 \leq x^n e \times \frac{1}{e^x} \leq x^n e$ soit $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

Comme $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ alors $\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx$

$$\int_0^1 0 dx = 0 \text{ et } \int_0^1 x^n e dx = e \int_0^1 x^n dx = e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

On pose $v_n = 0$ et $w_n = \frac{e}{n+1}$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq I_n \leq w_n$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

**Exercice 4** : On considère un jeu en deux parties :

- La 1^{ère} partie consiste à lancer une pièce de monnaie. Si on tombe sur « pile », on gagne 3€ et si on tombe sur face, on gagne 4€.
- La 2^e partie consiste à lancer un dé virtuel à 3 faces. Si on tombe sur « 1 », on gagne 1€, si on tombe sur « 2 », on gagne 2€ et si on tombe sur « 3 » on perd 5€.

On considère X et Y les variables aléatoires égales au gain du joueur respectivement lors de la 1^e partie et de la 2^e partie.

- a) Etablir les lois de probabilités des deux variables aléatoires X et Y .

Loi de probabilité de X :

$X = x_i$	3	4
$P(X = x_i)$	0,5	0,5

Loi de probabilité de Y :

$X = x_i$	-5	1	2
$P(X = x_i)$	1/3	1/3	1/3

- b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $S = X + Y$ donnant le gain cumulé à la fin des deux parties. Interpréter ce résultat.

On calcule

$$E(X) = 3 \times 0,5 + 4 \times 0,5 = 3,5$$

$$E(Y) = -5 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3,5 - \frac{2}{3} = \frac{17}{6} \approx 2,8$$

En moyenne, en reproduisant ce jeu en deux parties un grand nombre de fois, il gagnera 2,8€.