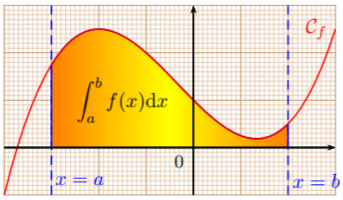
Intégrale

Soient a et b deux réels tels que ab et f **continue et positive sur [a ; b]**

On appelle l'intégrale de a à b de la fonction f l'aire (en unités d'aires du repère) de la surface du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation x=a et la droite d'équation x=b.

Cette aire est notée : Aire = $\int_a^b f(x)dx$



Théorème fondamental de l'analyse : Si f est une fonction continue et positive sur [a ; b], la fonction F définie sur [a ; b] par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

On a F'(x)=f(x)pour tout x[a ; b]

Propriété : calcul d'une intégrale : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Remarque : Cette formule s'étend aux fonctions continues de signes quelconques sur un intervalle I avec a et b deux réels quelconques de I et on peut alors définir l'intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

Conséquence : Si f est continue sur [a ; b], $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Propriétés algébriques :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

2. Linéarité : Pour tout réel k

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)+g(x)dx$

Valeur moyenne : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

<u>Inégalités</u> :

-Si x appartient à [a ; b], f(x) >= 0 alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

-Si x appartient à [a ; b], f(x) >= 0 alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

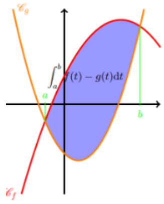
-Si x appartient à [a ; b], f(x) <= g(x) alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

-Calcul d'aire avec une fonction positive : Aire(D) = $\int_a^b f(x)dx$

Calcul d'aire avec une fonction négative : Aire(D) = - $\int_a^b f(x)dx$

-Calcul d'aire avec une fonction de signe non constant : Aire(D)=abf(x) dx-bcf(x) dx+cdf(x) dx

Calcul d'aire entre deux courbes : Aire(D) = abf(x)-g(x) dx



Propriété : intégration par parties : $\int_a^b (u'v)(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b (uv')(x)dx$