

Primitives de fonctions

Une primitive d'une fonction f , est une fonction F dont la dérivée est égale à f . $F' = f$

ex: $F(x) = x^2 + 2$ est une primitive de la fonction $f(x) = 2x$

Propriétés :

- Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .
- La primitive de la fonction nulle est une constante: si $f(x) = 0$, alors f est constante.
- Si F est une primitive de f , alors toutes les autres primitives de f s'écrivent: $G(x) = F(x) + K$ (avec K , un réel)
- Soit x_0 , un réel de l'intervalle I et y_0 un réel. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Primitives de fonctions usuelles

Composition de fonctions

fonction f définie sur I	une primitive F est donnée par...	validité...	forme de la fonction	primitive d'une constante	conditions
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$	$ax + b$	$ax + b$	$a \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	x^{n+1}	x^{n+1}	$n \neq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$	$\ln(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x > 0$
$f(x) = e^{ax}$	$F(x) = \frac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^{ax}}{a}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$a \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ ou $] -\infty; 0[$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x \neq 0$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$F(x) = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]0; +\infty[$ ou $] -\infty; 0[$	$\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \neq 1$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$2\sqrt{x}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x > 0$

Equations différentielles

C'est une équation dont l'inconnue est une fonction, sous la forme d'une relation entre la fonction et ses dérivées sur un intervalle. ex: $y' = 2y$

Cas 1 $\rightarrow y' = ay$ ou $y' - ay = 0$

C'est une équation linéaire homogène du 1^{er} ordre à coefficients constants.

Solution de l'équation différentielle (E):

$$f(x) = Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}. \text{ Soit } a \in \mathbb{R} \text{ et } C \text{ une constante réelle}$$

Cas 2 $\rightarrow y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Solutions :

$$\text{Si } a \neq 0, f(x) = Ce^{ax} + y_0, C \in \mathbb{R} \text{ et } y_0(x) = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Si } a = 0, f(x) = bx + c, c \in \mathbb{R}$$

Méthode générale:

- résoudre l'équation homogène (E') : $y' = ay$
- trouver une solution particulière de (E), sous la forme d'une fonction constante
- solutions $\rightarrow y(x) = \text{solutions de (E')} + \text{solutions particulières de (E)}$

Cas 3 $\rightarrow y' = ay + \phi$, avec ϕ une fonction

Solution : $y(x) = \text{Solution de l'équation homogène} + \text{Solution particulière de (E)}$

$$y(x) = C e^{ax} + P$$

f est solution de (E) si $f - P$ est solution de (E')

$$\downarrow$$

Solution de (E')

$$\downarrow$$

$P' = aP + \phi$