

Limites de fonctions

Limites infinies en un infini :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
Si pour tout A ,
 $[A; +\infty[$ contient les
 images pour x assez
 grand

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
Si pour tout A ,
 $] -\infty; A]$ contient les
 images pour x assez
 grand

Idem pour $x \rightarrow -\infty$

Limites finies en un infini :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$
Si tout intervalle contenant L contient toutes
 les images pour x assez grand

Asymptote horizontale :
de la forme $y = L$

Limites en un réel :

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$
Si $f(x)$ tend vers L par valeurs
 inférieures

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$
Si $f(x)$ tend vers L par valeurs
 supérieures

Si les limites à gauche et à droite sont égales, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Asymptote verticale (si $L = \pm\infty$) :
de la forme $x = a$

Limites de référence :

Fonction	Limite en $-\infty$	Limite en $+\infty$
x	$-\infty$	$+\infty$
x^2	$+\infty$	$+\infty$
x^3	$-\infty$	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0^-	0^+
$\sqrt{x}$	En 0^+ : 0	$+\infty$
e^x	0^+	$+\infty$
$\ln(x)$	En 0^+ : $-\infty$	$+\infty$

Théorèmes

Théorème des gendarmes :

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$
 Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Théorème de comparaison :

Si $g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$
 Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$
 Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Formes indéterminées :

" $\infty - \infty$ "

" $0 \times \infty$ "

" $\frac{\infty}{\infty}$ "

" $\frac{0}{0}$ "

Alors on doit factoriser ou utiliser les théorèmes

Théorème de croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$$

Fonctions composées :

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} g(X) = c$
 alors $\lim_{x \rightarrow a} g \circ u(x) = c$