Orthogonalité et distances dans l'espace :

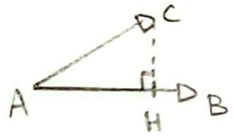
Formules :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + v^2$
- $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH$

si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens

sinon : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$



- Avec les coordonnées (dans un repère orthonormé)

  soit $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$

  $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

- Distance entre deux points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$:

  $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

- Mesure d'angle : trois points A, B, C

  $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

Propriétés :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- Une droite est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan.
- Deux droites (d) et (d') ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- (d) est une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.
  (P) est un plan dirigé par $(\vec{u}, \vec{v})$ non colinéaires.
  (d) est orthogonale à (P) si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$.

Distance d'un point à un plan

- (P) est un plan et A un point de l'espace. Il existe une unique droite orthogonale au plan (P) passant par A. Cette droite coupe le plan en H, c'est le projeté orthogonal de A sur le plan (P).
- Le projeté orthogonal H du point A sur (P) est le point de (P) le plus proche de A.
  $\vec{n}$ est un vecteur normal de P.

  $\text{dist}(A,P) = AH = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

Distance d'un point à une droite

- (d) est une droite et A un point de l'espace. Il existe une unique droite (d') perpendiculaire à (d) passant par A. (d') coupe (d) en H, projeté orthogonal de A sur (d).
- H est le point de (d) le plus proche de A.
  $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d).

  $AH^2 = AB^2 - \left(\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)^2$