Fiche de révision : Fonction logarithme népérien

I : Définition

Le logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

pour tout $x > 0$:

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x$$

A connaître par ♡ :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$
- $e^{\ln(x)} = x \quad (x > 0)$

1. La fonction $\ln$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$
2. La fonction $\ln$ est dérivable $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ donc strictement croissante : $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$.
3. La dérivée seconde est : $\ln(x)'' = -\frac{1}{x^2}$, strictement négative.
4. Si : $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$ et $x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$
5. Pour tous réels a et b strictement positif : $a = b \Rightarrow \ln a = \ln b$

II. Propriétés algébriques

Théorème : Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Propriétés :

- puissance positive : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln(a)$
- Inverse : $\ln \frac{1}{b} = -\ln(b)$
- quotient : $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- puissance négative : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$
- racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

III. Fonction de la forme $\ln(u)$

Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Méthode à connaître :

1. Déterminer le domaine en résolvant $u(x) > 0$
2. Calculer $u'(x)$
3. Appliquer la formule $\frac{u'}{u}$
4. Etudier le signe de la dérivée pour déterminer les variations

Propriété : Soit u une fonction définie sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$, Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ a le même sens de variation que u sur I.