Dérivation et convexité

Fonction composé

Soit g une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout reel x de I, $u(x) \in J$

$(g \circ u)(x) = g(u(x))$

exemple: $u(x) = x^2 + 4$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$

$g \circ u(x) = \sqrt{x^2+4}$ $\quad u \circ g(x) = x + 4$

Dérivée d'une fonction composée

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$ alors la fonction f définie par $f(x) = g(u(x)) = g \circ u(x)$.

$f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$

exemple: $f(x) = e^{3x^2-5}$ $\quad f'(x) = 6x e^{3x^2-5}$

$f'(x) = (3x^2+2)\, e^{x^3+2x}$

dérivée de la racine carré d'une fonction: $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\quad (e^u)' = e^u \times u'$

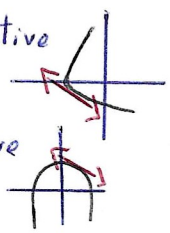
exemple: $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}$

dérivée d'une fonction à la puissance $(u^m)' = m \times u' \times u^{m-1}$

exemple: $f(x) = (3x-7)^5$ $\quad f'(x) = 5 \times 3 \times (3x-7)^{5-1} = 15(3x-7)^4$

Convexité et dérivée seconde

Une fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangente



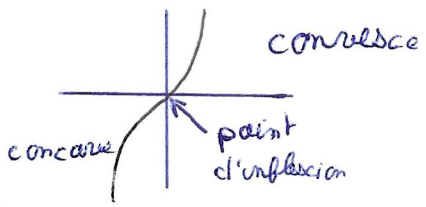
Une fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si sa courbe représentative est entièrement située en-dessous

f est **convexe** sur I si et seulement si f' est **croissante** sur I.
f est **convexe** sur I si et seulement si f'' est **positive** sur I

f est **concave** sur I si et seulement si f' est **décroissante** sur I
f est **concave** sur I si et seulement si f'' est **négative** sur I

exemple: $f(x) = x^3$ $\quad f'(3x^2)$ $\quad f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
convexité de f		concave	!	convexe	



Inégalités de convexité

Si f est convexe sur un intervalle I, alors pour tous nombre a, b de I on a:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Si f est concave sur un intervalle, I alors pour tous nombre a, b de I on a:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$