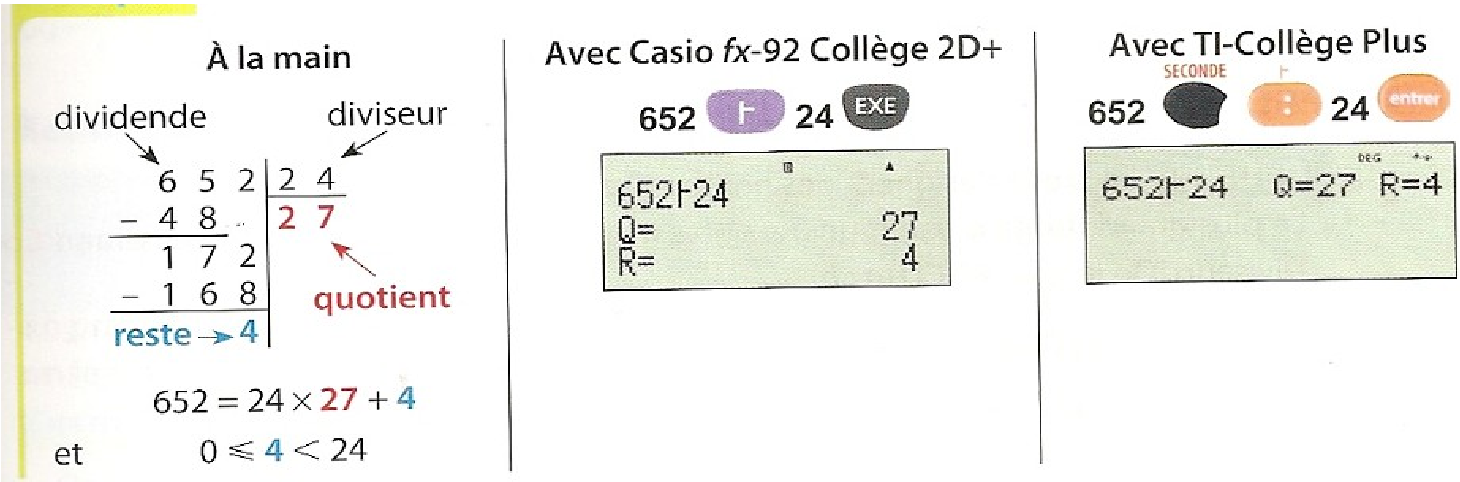
CHAPITRE : NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

I. Divisibilité

a) Division euclidienne : a et b désignent des entiers avec $b \neq 0$.
Effectuer la division euclidienne de a par b c'est trouver le quotient Q et le reste R tels que : a = b x Q + R et $0 \leq R < b$

Exemple : Division euclidienne de 652 par 24



b) Diviseurs : a et b désignent deux entiers avec $b \neq 0$
Dire que b est un diviseur de a signifie que le reste de la division euclidienne de a par b est nul. On a alors : a = b x Q (avec Q nombre entier)

On dit que a est un multiple de b ; a est divisible par b.

Exemple : Liste des diviseurs de 80
1 x 80 = 80
2 x 40 = 80 Ainsi les diviseurs sont : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80
4 x 20 = 80
5 x 16 = 80
8 x 10 = 80 On s'arrête là car 9 n'est pas un diviseur et 10 est déjà écrit

c) Diviseurs communs : a, b, k sont des nombres entiers avec $k \neq 0$.
Dire que k est un diviseur commun à a et b signifie que k divise à la fois a et b.

Remarque : 1 est un diviseur commun de tous les entiers.

Exemple : 2 x 6 = 12 et 2 x 19 = 38 ; 2 est un diviseur commun de 12 et 38.

d) PGCD : a et b désignent des nombres entiers non nuls.
Le plus grand diviseur commun à a et b est appelé le PGCD de a et b.
Plus Grand Commun Diviseur. On le note PGCD(a ; b)

Exemple : PGCD de 24 et 36
Liste des diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
Liste des diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
Liste des diviseurs communs : 1, 2, 3, 4, 6, 12 donc PGCD(24 ; 36) = 12

Remarques :
- PGCD(a ; a) = a
- Si b est un diviseur de a, alors PGCD(a ; b) = b

e) Nombres premiers entre eux : Dire que deux nombres entiers sont premiers entre eux signifie que leur PGCD est 1.

Remarque :
Deux nombres premiers entre eux ont pour seul diviseur commun le nombre 1

Exemple : 16 et 9 sont-ils premiers entre eux ?
Liste des diviseurs de 16 : 1, 2, 4, 8, 16
Liste des diviseurs de 9 : 1, 3, 9
Comme 1 est leur seul diviseur commun, alors 16 et 9 sont premiers entre eux.

II. Fractions irréductibles

a) Définition : Dire qu'une fraction est irréductible signifie que son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple : 16 et 9 sont premiers entre eux, donc $\frac{16}{9}$ est irréductible

b) Propriété (admise) : En simplifiant une fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur, on obtient une fraction irréductible.

Exemple : Simplifier au maximum $\frac{24}{36}$
Comme le PGCD(24 ; 36) = 12, alors en divisant cette fraction par 12, la fraction est irréductible.

$$\frac{24}{36}=\frac{24:12}{36:12}=\frac{2}{3}$$

III. Algorithme de calcul du PGCD

a) Algorithme des soustractions successives :

Propriété : a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec a > b alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; a - b)

Exemple : Calculer le PGCD de 221 et 143

PGCD(221 ; 143)	= PGCD(143 ; 78)	221 – 143 = 78
	= PGCD(78 ; 65)	143 – 78 = 65
	= PGCD(65 ; 13)	78 – 65 = 13
	= PGCD(13 ; 52)	65 – 13 = 52
	= PGCD(13 ; 39)	52 – 13 = 39
	= PGCD(13 ; 26)	39 – 13 = 26
	= PGCD(13 ; 13) = 13	26 – 13 = 13
		13 – 13 = 0

Ainsi PGCD(221 ; 143) = 13 ;

b) Algorithme d'Euclide :

Propriété : a et b désignent deux nombres entiers strictement positifs avec a > b alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r) où r est le reste de la division euclidienne de a par b

Exemple : Calculer le PGCD de 10 165 et 3 745

10 165 = 3 745 x 2 + 2 675
3 745 = 2 675 x 1 + 1 070
2 675 = 1 070 x 2 + 535
1 070 = 535 x 2 + 0

Ainsi PGCD(10 165 ; 3 745) = 535 ; c'est le dernier reste non nul.