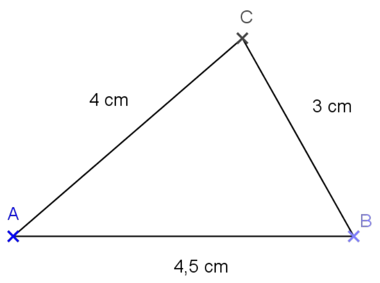
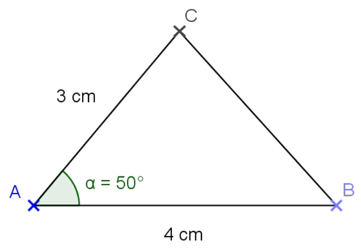
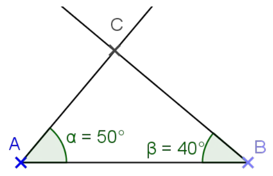
CHAPITRE : TRIANGLES

I. Constructibilité de triangles

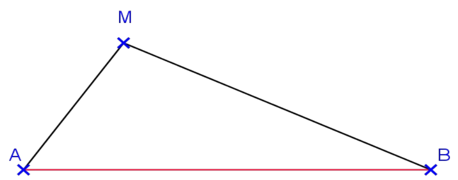
On peut construire un triangle si l'on connaît trois données :

On connaît la longueur des trois côtés	On connaît la longueur de deux côtés et la mesure d'un angle	On connaît la mesure d'un côté et la mesure de deux angles
		

II. Inégalité triangulaire

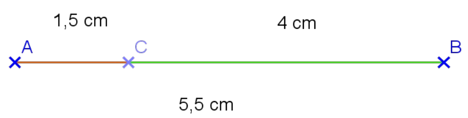
a) Cas général :
Le plus court chemin entre deux points est la ligne droite. Tout autre chemin passant par un troisième point est plus long ou égal.

Propriété : Si A, B, M sont trois points quelconques, alors $AB \leqslant AM + MB$



Dans le triangle ABM, on a également : $AM \leqslant AB + BM$ et $MB \leqslant MA + AB$

b) Cas d'égalité :
Propriété : Si un point M appartient au segment [AB], alors AB = AM + MB



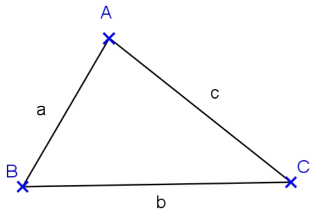
Propriété réciproque : Si trois points A, B, M sont tels que AB = AM + MB alors le point M appartient au segment [AB]

c) Application aux triangles

Pour pouvoir construire un triangle ayant pour côtés trois longueurs données, il faut que chaque longueur soit inférieure à la somme des deux autres.

Dans la pratique, il suffit de vérifier que la plus grande longueur est inférieure à la somme des autres.

Exemple : Dans le triangle ABC, on a

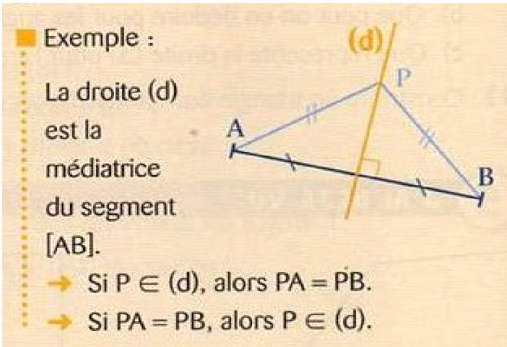


$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

III. Médiatrice et cercle circonscrit au triangle

a) Propriété directe : Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est à égale dustance des extrémités de ce segment

b) Propriété réciproque : Si un point est à égale distance des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice du segment



Construction de la médiatrice

Pour construire la médiatrice d'un segment [AB]

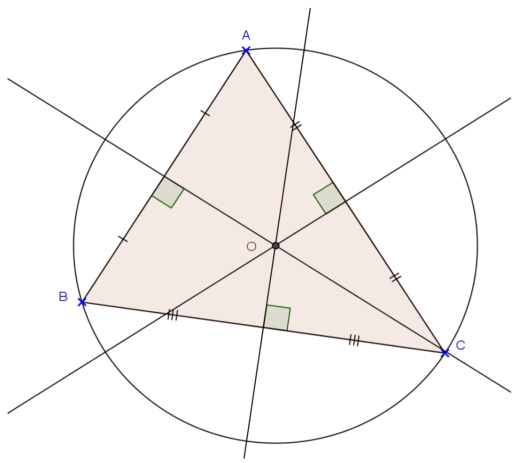
- on utilise un compas pour construire deux points à égale distance des points A et B
- on trace la droite reliant ces deux points

c) Définition cercle circonscrit : Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

d) Propriété :

Les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un seul point, elles sont concourantes.

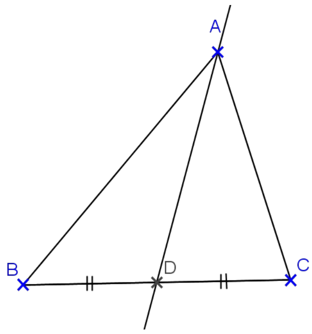
Le point d'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle.



IV. Autres droites remarquables d'un triangle

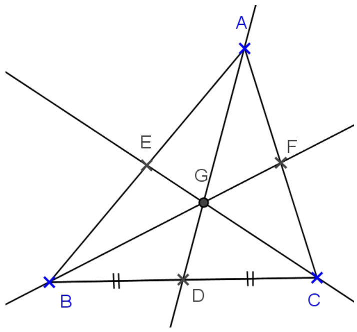
a) Médiane : Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Exemple : (AD) est la médiane issue de A



Propriété : Les trois médianes d'un triangle se croisent en un seul point, on dit qu'elles sont concourantes.

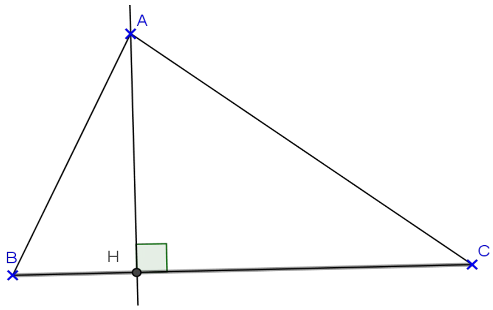
Le point d'intersection des médianes s'appelle le centre de gravité

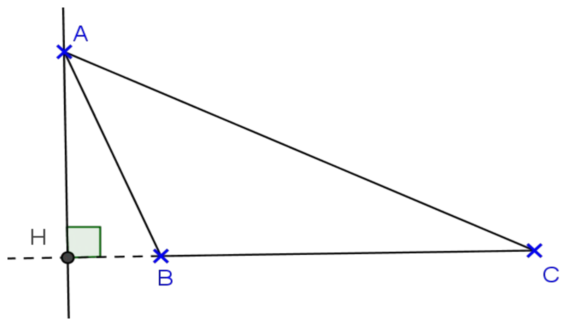


b) Hauteur : Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé de ce sommet.

Exemples : (AH) est la hauteur issue de A.
Le point H est appelé le pied de la hauteur relative au côté [BC]

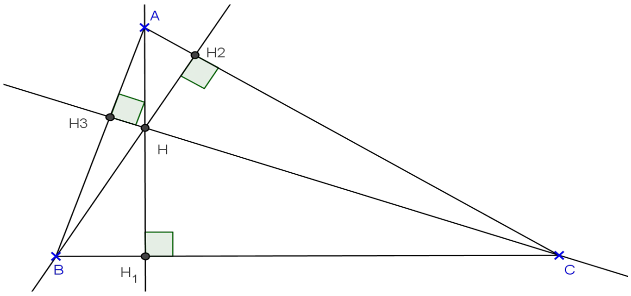
Remarque : la hauteur n'est pas forcément dans le triangle





Propriété : Les trois hauteurs d'un triangle se croisent en un seul point, on dit qu'elles sont concourantes.

Le point d'intersection des hauteurs s'appelle l'orthocentre.

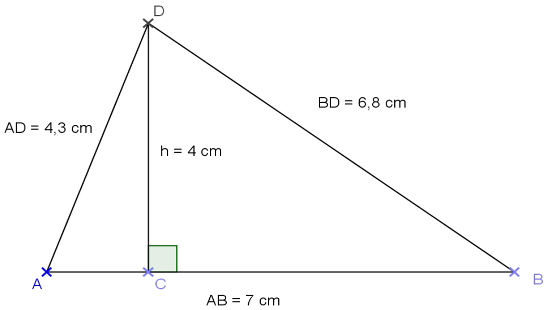


V. Périmètre et aire d'un triangle

a) Périmètre : Le périmètre d'un triangle est la somme des longueurs des trois côtés

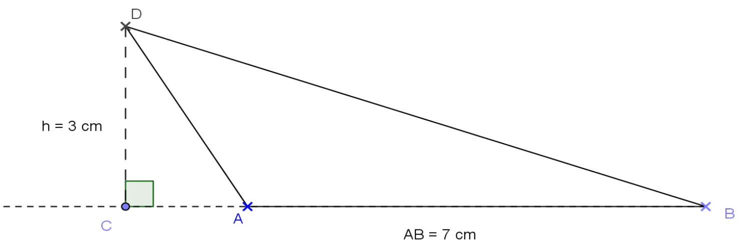
b) Aire : Aire du triangle = $\dfrac{\text{longueur d'un côté} \times \text{hauteur relative à ce côté}}{2}$

Exemples :



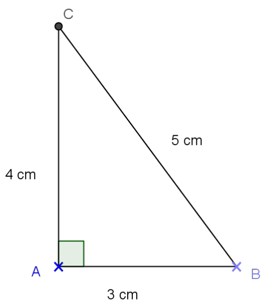
Périmètre = AB + BD + DA
= 7 + 6,8 + 4,3
= 18,1 cm

Aire = $\dfrac{AB \times CD}{2} = \dfrac{7 \times 4}{2} = 14\,cm^2$



Aire = $\dfrac{AB \times CD}{2} = \dfrac{7 \times 3}{2} = 10{,}5\,cm^2$

Remarque : Puisqu'il y a trois hauteurs, il y a trois façons de calculer l'aire d'un même triangle avec cette formule.



Cas particulier : Triangle rectangle

La hauteur issue de C est confondue avec le côté [AC]

Aire = $\dfrac{AB \times \text{hauteur relative à } [AB]}{2} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6\,cm^2$