Etude de fonction	**Corrigé Devoir maison 1**	Nom : Classe : TSTI2D

1. $f(0) = 1$; $f(1) = -1$; $f'(0) = 0$; $f'(2) = 0$
2. On sait que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ donc $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

On remplace x par les différentes valeurs soit dans $f(x)$ soit dans $f'(x)$ et on obtient le système :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \\ f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 1 \\ a \times 1^3 + b \times 1^2 + c \times 1 + d = -1 \\ 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = 0 \\ 3a \times 2^2 + 2b \times 2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = -1 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \\ a + b + 1 = -1 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'un système à deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 4b = -8 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a + 4b = 0 \\ -8a = -8 \end{cases}$$

Donc $a = 1$ et on remplace cette valeur dans la première équation : $1 + b = -2$ donc $b = -3$

Ainsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

3. $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ c'est en fait $f(x)$!!

On calcule sa dérivée : $g'(x) = 3x^2 - 6x$

- $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 0 = 36 > 0$ Donc g' admet deux racines $x_1 = \frac{6-\sqrt{36}}{2\times3} = \frac{6-6}{6} = 0$ et $x_2 = \frac{6+\sqrt{36}}{2\times3} = \frac{12}{6} = 2$
- Comme $a = 3 > 0$;

g' est positif en dehors des racines sur $]-\infty\,;0] \cup [2\,;\,+\infty[$ et négatif entre les racines sur $[0\,;2]$

- On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	

$g(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 + 1 = 1$

$g(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 1 = -3$

4.
   a. $g(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 1 = -1$
   b. Comme $g(1)$ et $g(2)$ sont négatifs, et que la fonction est strictement décroissante sur [1 ; 2] alors la fonction est strictement négative sur [1 ; 2]
   c. $g'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 = -3$
   La tangente T en 1 a pour équation : $y = g'(1)(x-1) + g(1) = -3(x-1) + (-1)$ donc
   T : $y = -3x + 3 - 1 = -3x + 2$
   d. On regarde le signe de $g(x) - T(x)$

$$h(x) = g(x) - T(x) = x^3 - 3x^2 + 1 - (-3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

On calcule sa dérivée : $h'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$

La dérivée est toujours positive car un carré est toujours positif.

Ainsi h est croissante sur $\mathbb{R}$. Or $h(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 3 \times 1 - 1 = 0$

Donc h est négative sur $]-\infty : 1]$ et positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

On en déduit que T est au-dessus de C_g sur $]-\infty : 1]$ et est en-dessous de C_g sur $[1\,;\,+\infty[$