Corrigé du devoir maison de révision – Mathématiques

Exercice 1 :

1. **Réponse C**.

Soit M un point d'affixe z. $|z| = 1 \iff OM = 1$ Donc ce sont l'ensemble des points qui ont une distance d'une unité à l'origine. C'est donc le cercle de centre O et de rayon 1.

2. Réponse C

On écrit $z_2 = -\sqrt{3} + i$ sous la forme exponentielle :

$|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2 \quad \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = 1/2$ donc $Arg\,(z_2) = \theta = \frac{5\pi}{6}$ ainsi $z_2 = 2e^{\frac{i5\pi}{6}}$

Calcul de $z_1 z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{\frac{i5\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6})} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i13\pi}{12}}$

3. Réponse B

$$z = 3e^{-\frac{i\pi}{6}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

4. Réponse A

- On écrit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ sous la forme exponentielle :

$|z_1| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $Arg\,(z_1) = \frac{\pi}{3}$ et $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

- On écrit $z_2 = \sqrt{3} - i$ sous la forme exponentielle :

$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-1}{2}$ donc $Arg\,(z_1) = -\frac{\pi}{6}$ et $z_1 = 2e^{\frac{-i\pi}{6}}$

- Calcul de $z_1 z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-\frac{i\pi}{6}} = 4e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})} = 4e^{\frac{i\pi}{6}}$

5. Réponse B

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6 \qquad \cos\theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $Arg\,(z) = \frac{2\pi}{3}$ et $z = 6e^{\frac{i2\pi}{3}}$

6. Réponse D

$$z^2 = \left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^2 = 2 - 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}i + \left(i\sqrt{2}\right)^2 = 2 - 4i - 2 = -4i$$

Exercice 2 :

1. a) Comme le déficit baisse de 8,6% par an, $u_1 = u_0 \times \left(1 - \frac{8{,}6}{100}\right) = 0{,}914u_0$

b) Le déficit en 2016 correspond au calcul de u_2 soit $u_2 = 0{,}914 \times u_1 = 0{,}914^2 \times u_0 \approx 12{,}531$

c) Comme chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre fixé 0,914, alors cette suite est géométrique de raison 0,914 et de terme initial $u_0 = 15$

Ainsi : $u_n = u_0 \times q^n$ soit $u_n = 15 \times 0{,}914^n$

2. a) $0{,}914^n \leq \frac{1}{3} \iff \ln(0{,}914^n) \leq \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ car la fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}+$

$\iff n\ln(0{,}914) \leq -\ln 3$ or $\ln(0{,}914) < 0$

$\iff n \geq -\dfrac{\ln 3}{\ln(0{,}914)} \iff n \geq 12{,}2$

Ainsi pour n supérieur ou égal à 13, $0{,}914^n \leq \frac{1}{3}$

b) Le déficit de la multinationale passe en-dessous des 5 millions, cela équivaut à

$u_n \leq 5$ soit $15 \times 0{,}914^n \leq 5$ soit $0{,}914^n \leq \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

D'après la question précédente, pour n supérieur ou égal à 13, $0{,}914^n \leq \frac{1}{3}$

Ainsi l'engagement de l'équipe de direction sera atteint en 2027.

3. On considère l'algorithme ci-dessous qui permet de retrouver le résultat de la question précédente.

a) Tant que **U > 5** faire

    N prend la valeur **N+1**
    U prend la valeur **U x Q**
Fin Tant que
Afficher **N**

b) Tant que **U > 5** faire

    N prend la valeur **N+1**
    U prend la valeur **U x Q**
    Afficher U
Fin Tant que

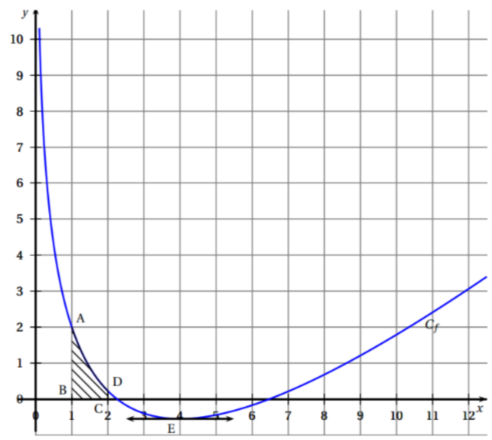
4. a) Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,914 et de terme initial $u_0 = 15$ alors

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = u_0 \frac{1-q^{11}}{1-q} = 15 \times \frac{1-0{,}914^{11}}{1-0{,}914} \approx 109{,}555$$

b)

Variables
N est un nombre entier
S, U sont des nombres réels
Entrée
Saisir N
S prend la valeur 15
U prend la valeur 15
Pour I allant de 1 à N
U prend la valeur U x 0,914
S prend la valeur S+U
Fin Pour
Sortie Disp S

<u>**Exercice 3**</u> :



Partie A

1. Comme A (1 ; 2) est sur la courbe représentative de f alors $f(1) = 2$

Comme la tangente en E d'abscisse 4 est horizontale alors $f'(4) = 0$

2. $f'(x) = a + \frac{b}{x}$ ainsi $f'(4) = a + \frac{b}{4} = 0$ donc $4a + b = 0$

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x - 4\ln(x) + 1$

1. $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1 \end{cases} \quad ainsi \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$$

La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$

2. $f(x) = x - 4\ln(x) + 1 = x\left(1 - \frac{4\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases} \quad ainsi \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x} = \frac{x-4}{x}$

Tableau de variation :

$f(4) = 4 - 4\ln(4) + 1 = 5 - 4\ln(4) \approx -0{,}55$

x	0		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-0{,}55$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

Soit la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $G(x) = x\ln(x) - x$

1. $G'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

2. $f(x) = x - 4\ln(x) + 1$

D'après la question 1, une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$ donc une primitive de f est :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 4(x\ln(x) - x) + x = \frac{x^2}{4} - 4x\ln(x) + 5x$$

<u>**Exercice 4**</u> : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ on considère les points A (-1 ; 2) ; B (1 ; -3) et C (4 ; 4).

1. Calcul des composantes : $\overrightarrow{AB}\binom{1+1}{-3-2} = \binom{2}{-5}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}\binom{4+1}{4-2} = \binom{5}{2}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 5 + (-5) \times 2 = 0$$

2. Calcul des composantes : $\overrightarrow{BA}\binom{-2}{5}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC}\binom{4-1}{4+3} = \binom{3}{7}$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -2 \times 3 + 5 \times 7 = 29$$

3. $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{ABC}) = \sqrt{29} \times \sqrt{58} \times \cos(\widehat{ABC}) = 29$$

Ainsi : $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{29}{\sqrt{29}\times\sqrt{58}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Comme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Le triangle ABC est rectangle en A. Ainsi $\widehat{BAC} = 90°$

Comme $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\widehat{ABC} = 45°$ et donc $\widehat{BCA} = 45°$ car la somme des angles d'un triangle fait 180°.

Ainsi, le triangle admet deux angles égaux, c'est un triangle isocèle.

En conclusion, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.