Correction du BAC Blanc
STI2D/STL (SPCL)

<u>Exercice 1</u> : 4 points

1. **Une primitive de f définie pour $x > 0$ par $f(x) = 3x + \frac{2}{x}$ est la fonction b.** $F(x) = \frac{3x^2}{2} + 2\ln x$.
   En effet , $F'(x) = \frac{3\times 2x}{2} + 2 \times \frac{1}{x} = f(x)$.
2. **$\ln(128)$ est égale à :** b. $7\ln(2)$. En effet, b. $7\ln(2) = \ln(2^7) = \ln 128$.
3. **Soit $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors l'écriture exponentielle du conjugué de z est :** d. $\bar{z} = e^{-\frac{i2\pi}{3}}$
   En effet, $|\bar{z}| = |z| = \sqrt{(\frac{-1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ et $\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$; $\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
4. **Soit $z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Son inverse est égal à : $\frac{1}{z} = \frac{1}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, soit la réponse d.**

<u>Exercice 2</u> : 4 points

<u>**Partie A**</u> :

1. $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}}$

2. $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

<u>**Partie B**</u> : On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes définis par : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\quad z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ $\quad z_3 = e^{\frac{i7\pi}{12}}$

1. $\boldsymbol{|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.}$

$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{2}}$ **et** $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ **donc** $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ **et** $\boldsymbol{z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2. $z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{\frac{i\pi}{4}} = 2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} = 2 \times e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2 \times z_3$

4. $2 \times z_3 = z_1 \times z_2 = (1 + i\sqrt{3}) \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + i^2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Donc : $z_3 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

5. Comme $z_3 = e^{\frac{i7\pi}{12}} = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \times \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **; on a :**

$\boldsymbol{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ **et** $\boldsymbol{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$

<u>Exercice 3</u> : 6 points

1. Calculons les pourcentages d'augmentation annuels entre 2013 et 2014 ainsi qu'entre 2014 et 2015.
   Le taux t est défini par $\frac{valeur\ finale - valeur\ initiale}{valeur\ initiale}$.
   Entre 2013 et 2014, on a : $t = \frac{180-139}{139} \approx 0{,}29496$. Entre 2014 et 2015, on a : $t = \frac{233-180}{180} \approx 0{,}2944$.
   Le pourcentage d'augmentation annuel entre 2013 et 2014 est, à 0,1% près, d'environ 29,5% et entre 2014 et 2015 d'environ 29,4%.

2. On se propose d'estimer la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde dans les 15 ans à venir, si le taux de croissance annuel reste constant et égal à 30%
   On note P_n la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde, en GW, à la fin de l'année 2015 + n.
   On a ainsi $P_0 = 233$.
   a) Un taux d'augmentation de 30% correspond à un coefficient multiplicateur de 1,3.
      $P_1 = 233 \times 1{,}3 = 302{,}9$ puis $P_2 = 302{,}9 \times 1{,}3 = 393{,}8$.
   b) $P_{n+1} = 1{,}3 \times P_n$.
   c) Chaque terme se déduisant du précédent en le multipliant par un même nombre, la suite (P_n) est une site géométrique de raison q=1,3 et de premier terme $P_0 = 233$.
   d) $P_n = 233 \times 1{,}3^n$.
   e) La puissance solaire photovoltaïque, en GW, installée dans le monde fin 2025 (2015+10) est alors $P_{10} = 233 \times 1{,}3^{10} \approx 3212$.
   f) Le taux d'évolution global est $\frac{3212-233}{233} \approx 12{,}7854$. Le pourcentage global d'augmentation de cette puissance solaire mondiale entre 2015 et 2025 est 1279%.
3. On veut déterminer l'année durant laquelle la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde atteindrait 16 000 GW.
   Pour atteindre cette puissance, les panneaux photovoltaïques occuperaient au sol l'équivalent d'un carré de 400 km de côté et suffiraient pour produire toute l'électricité consommée dans le monde (consommation domestique, industrielle et des transports).

   a) On considère l'algorithme ci-dessous (à gauche).

Ancienne version

```
1/ Affecter à N la valeur 0
2/ Affecter à P la valeur 233
3/ Tant que P < 16000.
4/ Affecter à N la valeur N+1
5/ Affecter à P la valeur P x 1,30
6/ Fin Tant que
7/Afficher N+2015
```

Nouvelle version (bac 2018)

```
1/ N ← 0
2/ P ← 233
3/ Tant que P < 16000.
4/ N ← N+1
5/ P ← P x 1,30
6/ Fin Tant que
```

b)

N	0	…	11	12	13	14	15	16	17
P	233	…	4176	5428	7057	9174	11926	15504	20155
$P < 16000$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

L'algorithme affiche 2015+17, soit 2032.

L'année durant laquelle la puissance solaire photovoltaïque installée dans le monde dépasserait 16 000 GW serait 2032.

c) On résout l'inéquation $P_n \geq 16000$.

$233 \times 1{,}3^n \geq 16000$.

$1{,}3^n \geq \frac{16000}{233}$

$\ln 1{,}3^n \geq \ln \frac{16000}{233}$

$n \ln 1{,}3 \geq \ln \frac{16000}{233}$

$n \geq \frac{\ln \frac{16000}{233}}{\ln 1{,}3}$

Or, $\frac{\ln \frac{16000}{233}}{\ln 1{,}3} \approx 16{,}12$ soit $n = 17$. L'année est, donc, 2015+17=2032

<u>Exercice 4</u> : 6 points

Partie A

1. a. $f(1) = -1$.
   b. $f'(1) = -2$.
   c. $y = 1 - 2x$

2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = 2\ln x + \frac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.
   a. $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^2}$.
   b. $f'(1) = \frac{2}{1} - \frac{a}{1^2} = 2 - a = -2$ donc $a = 4$
   $f(1) = 2\ln 1 + \frac{4}{1} + b = 4 + b = -1$ donc $b = -5$

Partie B

1. a. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$, on a :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln x + \frac{4}{x} - 5 = +\infty$.
   b. La courbe représentative de la fonction f a une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
2. a. $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} = \frac{2x-4}{x^2}$.
   b.

x	0		2		$+\infty$
$2x-4$		-	0	+	
x^2	0	+		+	
$f'(x)$	$\parallel$	-	0	+	
$f(x)$	$\parallel$ $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2 - 3$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction f est strictement décroissante et continue sur $]0; 2]$.Comme $f(1) = -1$ et $f(0{,}5) \approx 1{,}6$;$O \in [f(1); f(0{,}5)]$. Par conséquent l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle]0 ;2].
   La fonction f est strictement croissante et continue sur $[2; +\infty[$.Comme $f(2) \approx -1{,}6$ et $f(10) \approx 0{,}005$;$O \in [f(2); f(10)]$. Par conséquent l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle [2 ;+∞[. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions sur]0;+∞[
4. a. Comme $f(1) = -1$ et $(3) \approx -1{,}46$, f est négative sur [1 ;3].
   b. $F'^{(x)} = 2\ln x + (2x+4) \times \frac{1}{x} - 7 = 2\ln x + \frac{2x}{x} + \frac{4}{x} - 7 = 2\ln x + 2 + \frac{4}{x} - 7 = 2\ln x + \frac{4}{x} - 5 = f(x)$.
   Donc Fest une primitive de f.