Suites	**Corrigé du contrôle n°1** Avec calculatrice	Nom : Classe : TS2

Exercice 1 :

a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^3+4n^2-6=+\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 7n^3-189=+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

On factorise : $\frac{3n^3+4n^2-6}{7n^3-189}=\frac{n^3\left(3+\frac{4}{n}-\frac{6}{n^3}\right)}{n^3\left(7-\frac{189}{n^3}\right)}=\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{6}{n^3}}{7-\frac{189}{n^3}}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{4}{n}-\frac{6}{n^3}=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 7-\frac{189}{n^3}=7$

Donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^3+4n^2-6}{7n^3-189}=\frac{3}{7}$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

On factorise : $3^n-2^n=3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)=3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ car c'est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}\in]-1\,;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n=1$

Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}(3^n-2^n)=+\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -6n^2=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\frac{1}{n}=5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -6n^2+5+\frac{1}{n}=-\infty$

d) on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $-1\leq \sin n\leq 1$ donc $-1+n\leq n+\sin n\leq n+1$ et comme n^2 est positif,

$\frac{-1+n}{n^2}\leq\frac{n+\sin(n)}{n^2}\leq\frac{n+1}{n^2}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1+n}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+n}{n^2}=0$ d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+\sin(n)}{n^2}=0$

Exercice 2 :

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- Entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- Entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, $u_n$désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$.

On a donc $u_0=3\,000$.

1. $u_1=(3000+80)\times\left(1-\frac{5}{100}\right)=2926$

2. Pour calculer u_{n+1}, on prend la valeur précédente, on rajoute les 80 cétacés puis on fait une baisse de 5% soit une multiplication par 0,95, ce qui donne $u_{n+1}=0{,}95(u_n+80)=0{,}95u_n+76$, , pour tout entier naturel n.

3. a)

- Initialisation : $u_0=3\,000\geq 1520$

La proposition est vraie pour $n=0$

- Hérédité : il existe un rang k tel que $u_k\geq 1520$
  - Au rang $k+1$: on sait que $u_k\geq 1520$ donc $0{,}95u_k\geq 0{,}95\times 1520=1444$ et $0{,}95u_k+76\geq 1520$

Donc $u_{k+1} \geq 1520$. La proposition est vraie au rang $k+1$

- Conclusion : la proposition est initialisée, et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1520$

b) On calcule : $u_{n+1} - u_n = 0{,}95u_n + 76 - u_n = -0{,}05u_n + 76$

Comme $u_n \geq 1520$ alors $-0{,}05u_n \leq -76$ et $-0{,}05u_n + 76 \leq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Ce qui prouve que la suite est décroissante.

c) Comme la suite est minorée par 1520 et qu'elle est décroissante, d'après le théorème de convergence monotone, la suite est convergente.

4. a)

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u>2000
    n ← n+1
    u ← 0,95u+76
Fin de Tant que
```

4. b) D'après la calculatrice, $u_n \leq 2000$ pour $n = 22$.

Exercice 3 :

- Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $\frac{2}{2\times 0+1} = 2$

La proposition est vraie pour $n = 0$

- Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k = \frac{2}{2k+1}$
    - Au rang $k+1$: On veut montrer que $u_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$
    - $u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2}{2n+3}$

Donc la proposition est vraie au rang $k+1$

- Conclusion : la proposition est initialisée, et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2}{2n+1}$