

# Chapitre I : Les suites

## Le raisonnement par récurrence

**Principe :** Si la propriété P est : -vraie au rang  $n_0$  (Initialisation).

-héréditaire à partir du rang  $n_0$  (Hérédité)

alors la propriété P est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$  (conclusion)

## Limites

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$
• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$
• Pour tout entier $k \geq 1$ :	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$	• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

" $\infty - \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{\infty}{0}$ "

## Suite géométrique

Formule de récurrence :  $u_{n+1} = q \times u_n$

Formule explicite :  $u_n = u_0 \times q^n$

## Suite arithmétique

Formule de récurrence :  $u_{n+1} = u_n + r$

Formule explicite :  $u_n = r \times n + u_0$

## Somme des termes d'une suite géométrique :

$$u_0 + u_0q + u_0q^2 + \dots + u_0q^n = \text{terme initial} \times \frac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1 - q}$$

## Somme des termes d'une suite arithmétique :

$$u_0 + u_0 + r + u_0 + 2r + \dots + u_0 + nr = \text{nbre termes} \times \frac{(\text{terme initial} + \text{terme final})}{2}$$

## Limite d'une suite géométrique :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

## Théorèmes de comparaison :

1) Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

2) Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \geq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

## Théorème d'encadrement (théorème des gendarmes) :

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$

## Suites majorées, minorées, bornées

$(u_n)$  est majorée signifie qu'il existe un nombre M tel que, pour tout n,  $u_n \leq M$

$(u_n)$  est minorée signifie qu'il existe un nombre m tel que, pour tout n,  $u_n \geq m$

Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée

## Théorème de convergence d'une suite monotone

1. Toute suite croissante majorée est convergente
2. Toute suite décroissante minorée est convergente

## Corollaire :

1. Toute suite croissante non majorée a pour limite  $+\infty$
2. Toute suite décroissante non minorée a pour limite  $-\infty$