Suites –Complexes	**Corrigé du devoir maison n°2**	Nom : Classe : TS2

<u>Exercice 1 :</u> On considère la suite (u_n) définir par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$

1. $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} \times 1 - 2 = -\frac{5}{3}$ $\qquad$ $u_2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{14}{9}$

$u_3 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{9}\right) + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$

2. a) On montre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 4$

$$u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{14}{27}\right) + 1 = -\frac{14}{81} + \frac{81}{81} = \frac{67}{87} \geq 0$$

La proposition est vraie au rang $n = 4$.

<u>Hérédité</u> : On suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k \geq 0$

Au rang $k + 1$: Comme $u_k \geq 0$ alors $\frac{1}{3}u_k \geq 0$, comme $k \geq 4$ alors $k - 2 \geq 0$

On obtient que $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + k - 2$ est la somme de deux termes positifs donc $u_{k+1} \geq 0$.

La proposition est vraie au rang $k + 1$.

<u>Conclusion</u> : La proposition est initialisée au rang $n = 4$, elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 4$, ainsi $u_n \geq 0$.

b) On sait que $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 = u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + (n + 1) - 3$

D'après la question précédente : Pour tout entier naturel $n \geq 4$, donc pour tout entier $n \geq 5$, $u_n \geq 0$.

Pour tout $n \geq 4$, $u_{n+1} \geq (n + 1) - 3$,

donc en faisant un <u>changement d'indice</u> : pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$

c) Comme pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$ alors d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

a) $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n + 1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n - \frac{15}{2}$

$$v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de terme initial $v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$

b) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de terme initial $v_0 = -\frac{25}{2}$

alors $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$, or on sait que $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ donc $u_n = -\frac{v_n}{2} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

On remplace v_n par son expression, on obtient : $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

c) Soit S_n définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}k - \frac{21}{4}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2}k - \sum_{k=0}^{n} \frac{21}{4} = \frac{25}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n}\frac{21}{4}$$

La première somme est la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ comportant $(n+1)$ termes.

La deuxième somme est la somme des n premiers entiers

La troisième somme est $\frac{21}{4}$ additionné $(n+1)$ fois.

$$S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21(n+1)}{4}$$

$$S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} + \frac{3n(n+1)}{4} - \frac{21(n+1)}{4} = \frac{75}{8} \times \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{3n^2-18n-21}{4}$$

Exercice 2 :

a) On pose $z = a + ib$ alors $\bar{z} = a - ib$, l'équation devient : $2(a+ib) + i(a-ib) = 4$

On développe et on rassemble les termes : $(2a+b) + i(2b+a) = 4$

Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

On résout le système :

- On multiplie la 2e équation par 2 et on soustrait les équations :
$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases}$$
- On obtient
$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ -3b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$
- On remplace la valeur de b dans la 1ère équation :
$$\begin{cases} 2a - \frac{4}{3} = 4 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Ainsi la solution de l'équation est $z = \frac{8}{3} - \frac{4}{3}i$

b) Tout d'abord, $z \neq i$, sinon le calcul est impossible à cause de la division par zéro.

$\frac{z+i}{z-i} = 5 \Rightarrow (z+i) = 5(z-i)$ attention c'est une implication et non une équivalence.

Ainsi : $z + i = 5z - 5i$ soit $4z = 6i$ ou bien $z = \frac{6}{4}i = \frac{3}{2}i$ comme c'est différent de i c'est bien solution;

la solution de l'équation est $z = \frac{3}{2}i$

c) $-2z^2 + 3z - 2 = 0$

C'est une équation du second degré. On calcule $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = -7$

Comme le discriminant est négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$x_1 = \frac{-3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2\times(-2)} = \frac{3+i\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}$ et $x_2 = \frac{-3+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2\times(-2)} = \frac{3-i\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}$

d) $\frac{3z^2+2z-4}{z^2+3} = 1$; l'équation existe si $z^2 + 3 \neq 0$ soit $z \neq i\sqrt{3}$ ou $z \neq -i\sqrt{3}$

L'équation devient : $3z^2 + 2z - 4 = z^2 + 3$ soit $2z^2 + 2z - 7 = 0$

C'est une équation du second degré. On calcule $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 60$

Comme le discriminant est positif, l'équation admet deux solutions réelles

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{60}}{2\times2} = \frac{-2-2\sqrt{15}}{4} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{60}}{2\times2} = \frac{-2+2\sqrt{15}}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}$

Ces deux solutions sont différentes de $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$, donc elles sont solutions de l'équation.

<u>Exercice 3</u> :

Soit l'équation (E) : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. On teste des valeurs entières tels que $z = 0$; -1 ; -2 ; 1 ; 2

On s'aperçoit que pour $z = 1$; $1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$; ainsi 1 est solution de l'équation.

2. On développe : $(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2$

3. $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ est équivalent à $(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0$

Une équation-produit dans $\mathbb{C}$ est nulle si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc :

$z^2 + z - 2 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$

- $z^2 + z - 2 = 0$; on voit aisément que 1 est solution donc on peut factoriser : $z^2 + z - 2 = (z - 1)(z + 2)$

  Les solutions sont $S = \{-2\,; 1\}$

- $z^2 + z + 1 = 0$; on calcule $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2 < 0$

  Comme le discriminant est négatif, il y a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et : $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

  Les solutions sont $S = \{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$

Ainsi (E) admet quatre solutions : $S = \{-2\,; 1\,; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,; \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$