Chapitre II : Les nombres complexes partie 1

Théorème d'existence

ℂ contient un élément tel que **i^2= -1**

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique z **= a + ib, forme algébrique**

Vocabulaire

a est la partie réelle de z noté a=Re(z)

b est la partie imaginaire de z noté b=Im(z)

Tout nombre complexe de la forme z =a est un nombre réel

Tout nombre complexe de la forme z=ib est appelé imaginaire pur

Théorème d'égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes **sont égaux ssi** ils ont la même partie réelle et même partie imaginaire **: a + ib = a' +ib' équivaut à a = a' et b = b'**

Calculs dans ℂ :

Sommes : z + z' = (a+ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b+b')

Produit : zz' = (a+ib)(a'+ib') = aa' + bb' i^2 + a'bi + ab'i = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)

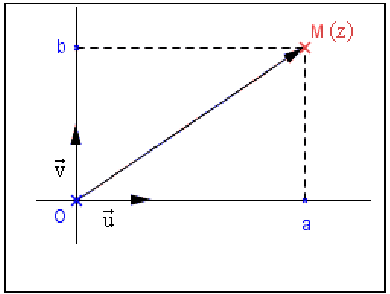
Identité remarquable : (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2

Inverse : 1 / z= 1/ a+ib = a-ib/ a^2+b^2

Quotient : z/z'=a+ib/ a'+ib'=(a+ib)1/ a'+ib'

Définition du conjugué :

Soit z=a+ib un nombre complexe.
On appelle conjugué de z le nombre complexe de la forme a-ib et on le note $\bar{z}$. Ainsi $\bar{z} = a - ib$



Définition : Affixe d'un vecteur

L'affixe d'un vecteur $\vec{w}$ de composantes (a ; b) est le complexe z=a+ib

Propriété du conjugué :

1. Somme : $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
2. Produit : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
3. Puissance : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
4. Inverse : si z≠0,$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
5. Quotient : si z≠0, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$
6. $z\bar{z}$ = (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2 ; le nombre $z\bar{z}$ est un réel positif ou nul.
7. z est un réel ssi il est égal à son conjugué.
8. z est un imaginaire pur ssi il est égal à l'opposé de son conjugué.

Théorème : Solutions de l'équation :

Dans ℂ, l'équation $az^2+bz+c=0$,avec a ≠0, a, b, c réels a **toujours** des solutions.
On note Δ le discriminant de cette équation, Δ =b^2-4ac

- Si Δ>0, l'équation admet deux solutions réelles ;$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; ;$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si Δ= 0, l'équation admet une solution double réelle, $x_a = \frac{-b}{2a}$
- Si Δ< 0, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées,
  $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Définition : Affixe d'un point

A tout nombre complexe z=a+ib avec a, b deux réels, on associe dans le plan, un point M, et un seul, de coordonnées (a ; b). M est appelé l'image de z, on note M(z).

Réciproquement à tout point M de coordonnées (a ; b) dans le repère (O ; u ; v), on associe le nombre complexe unique z=a+ib. z est appelé l'affixe de M

Propriétés des affines :

1. A a pour affixe z_a et B a pour affixe z_b dans un repère orthonormé le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : z_b-z_a. 2. $z_{\overrightarrow{u+v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$ 3.$z_{k\vec{u}} = k \times z_{\vec{u}}$

4. Soit I le milieu de [AB] alors $z_I = \frac{z_a+z_b}{2}$