Limites de fonctions *Continuité*	**Corrigé du contrôle n°3**	Nom : Classe : TS2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$

Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire :

On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$ où x appartient à $\mathbb{R}$.

a) On calcule $g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$

Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction g est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) Calcul des limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x + 8 = +\infty \end{cases} \textit{donc par addition, } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x + 8 = -\infty \end{cases} \textit{donc par addition, } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

c) On calcule $g(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2) + 8 = -6$; $g(0) = 0^3 + 3 \times 0 + 8 = 8$

Comme $0 \in [g(-2); g(0)] = [-6\,; 8]$,

Comme g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

Il existe un unique $\alpha \in [-2\,; 0]$ tel que $g(\alpha) = 0$

d) Grâce à la table sur la calculatrice : $-1{,}513 < \alpha < -1{,}512$

e) La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $g(\alpha) = 0$ donc

g est négative sur l'intervalle $]-\infty\,;\ \alpha]$ et positive sur $[\alpha\,;\ +\infty[$

Partie II : Etude de la fonction f :

a) Calcul des limites :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty \end{cases} \text{donc le quotient est une forme indéterminée.}$$

On factorise : $f(x) = \frac{x^3\left(1-\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = x\frac{1-\frac{4}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{4}{x^3} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3-4 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty \end{cases}$ donc le quotient est une forme indéterminée.

Par la même factorisation : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{4}{x^3} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) Calcul de la dérivée

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1)-(x^3-4)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4+8x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

c) Tableau de signe et de variation :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x2+1)2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = \frac{0^3-4}{0^2+1} = -4$

$f(\alpha) \approx f(-1{,}51) \approx -2{,}27$

d) On calcule $f(x) - x = \frac{x^3-4}{x^2+1} - x = \frac{x^3-4-x(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{x^3-4-x^3-x}{x^2+1} = \frac{-4-x}{x^2+1}$

On cherche le signe de $f(x) - x$:

Comme le dénominateur est constamment positif, on cherche le signe du numérateur.

$-4 - x > 0 \Leftrightarrow -4 > x$

Ainsi sur $]-\infty\ ;\ -4]$, $f(x) - x > 0$ et la courbe représentative de f est au-dessus de la droite.

Sur $[-4\ ;\ +\infty[$, $f(x) - x < 0$ et la courbe représentative de f est en-dessous de la droite.

<u>BONUS :</u>

si x est non nul, $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{x(x^3-4)}{x(x^2+1)} = x\frac{x^3-4}{x^3+x}$

Comme $g(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0$ alors $\alpha^3 = -3\alpha - 8$

On remplace : $f(\alpha) = \alpha\frac{\alpha^3-4}{\alpha^3+\alpha} = \alpha\frac{-3\alpha-8-4}{-3\alpha-8+\alpha} = \alpha\frac{-3\alpha-12}{-2\alpha-4} = \alpha\frac{3(-\alpha-4)}{2(-\alpha-4} = \frac{3}{2}\alpha$

On sait que : $-1{,}513 < \alpha < -1{,}512$ donc $-2{,}2695 < \frac{3}{2}\alpha < -2{,}268$ soit $-2{,}2695 < f(\alpha) < -2{,}268$