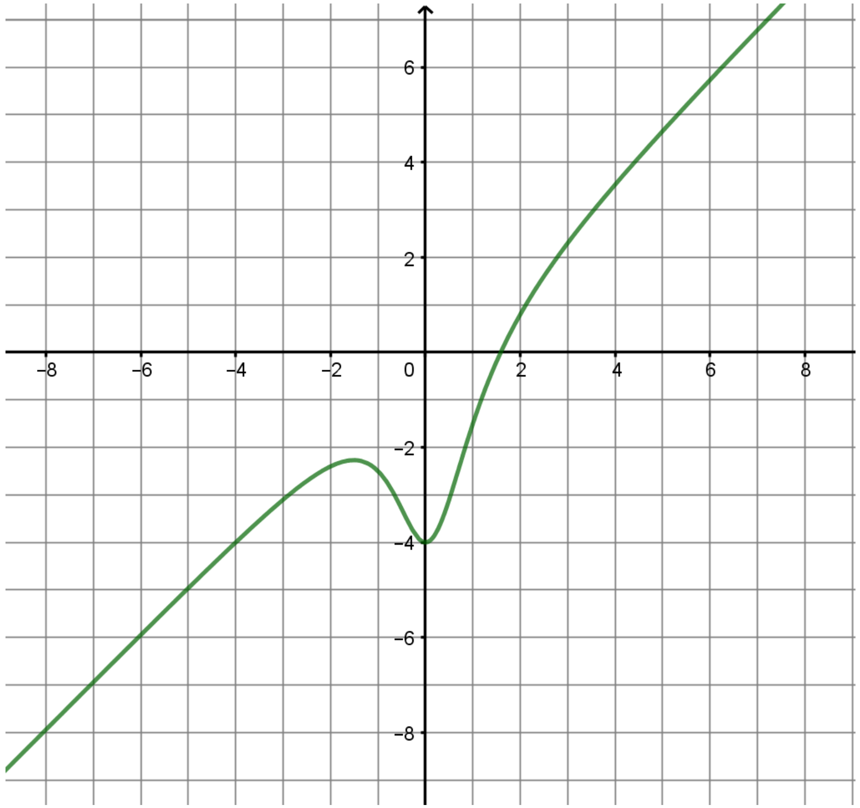
Limites de fonctions *Continuité*	**Contrôle n°3 – 50 min**	Nom : Classe : TS2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative tracée dans le repère orthonormé ci-contre.



Partie I : Etude d'une fonction auxiliaire :

On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$ où x appartient à $\mathbb{R}$.

a) Etablir les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
d) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
e) Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x sur $\mathbb{R}$.

Partie II : Etude de la fonction f :

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x réel, on a $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$
c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
d) Sur le graphique ci-contre, tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$. Etudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{D}$

BONUS :

En remarquant que, pour tout réel x non nul, $f(x) = \frac{x(x^3-4)}{x^3+x}$, montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$