Chapitre 7 : Nombres complexes (2)

Définitions : module et argument d'un complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M le point d'affixe z.

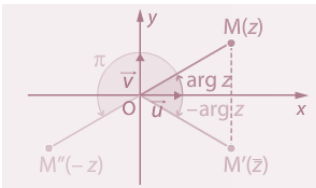
- Le module de z , noté $|z|$ est la distance OM, c'est-à-dire le nombre réel $\sqrt{a^2+b^2}$
- Un argument du complexe non nul z, noté $Arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{OM})$

Conséquences directes :

- Tout réel strictement positif a un argument égal à 0
- Tout réel strictement négatif a un argument égal à π
- Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}$

Tout nombre imaginaire pur, de partie imaginaire strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}$

Propriétés :



$$|z|^2 = z\bar{z}$$
$$|\bar{z}| = |z|$$
$$|-z| = |z|$$

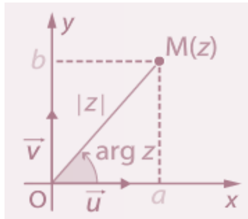
$$arg(\bar{z}) = -arg(z)$$
$$arg(-z) = arg(z) + \pi$$

Propriétés :

- Pour tous points A et B d'affixes z_A et z_B, $AB = |z_B - z_A|$
- Pour tous points A et B distincts d'affixes z_A et z_B, $(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$$(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Définition : forme trigonométrique d'un nombre complexe



Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme :

$z = r(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)$ avec $arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ et $r = |z| \in \mathbb{R}_*^+$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z

Passage de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

Propriété de la somme sur les modules

Pour tous nombres complexes z_1, z'_2 :

$$|z_1 + z'_2| \leq |z_1| + |z'_2|$$

Propriétés des modules et des arguments :

Soient z_1 et $z_2 \neq 0$ des complexes, $n \in \mathbb{N}$:

Produit	$\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert$	$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) + 2k\pi$
Inverse	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$arg(\frac{1}{z}) = -arg(z) + 2k\pi$
Puissances	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$arg(z^n) = narg(z) + 2k\pi$
Quotient	$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$	$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2) + 2k\pi$

Définition : notation exponentielle :

Pour tout réel θ, on pose $e^{i\theta} = cos\ \theta + i\ sin\ \theta$

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme :

$z = re^{i\theta}$; c'est la notation exponentielle du nombre complexe.

Propriétés :

Pour tous réels θ et θ' :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ avec $n \in \mathbb{N}$: formule de Moivre

Autre formule de Moivre :

$$(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)^n = cos\ (n\theta) + i\ sin\ (n\theta)$$

Ensemble de points :

Le point M d'affixe z appartient au cercle de centre A et de rayon $r > 0$ ssi $|z - z_A| = r$

Le point M d'affixe z appartient à la médiatrice du segment [AB] ssi $|z - z_A| = |z - z_B|$