Nombres complexes *Fonctions trigonométriques*	**Corrigé du devoir maison n°4**	Nom : Classe TS2

<u>Exercice 1 :</u>

1. a) Soit O le centre du cercle inscrit. On découpe le triangle ABC en trois triangles OAB, OBC et OAC.

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

Le cercle inscrit étant tangent aux trois côtés du triangle, alors les rayons [OF], [OE] et [0D] sont perpendiculaires aux côtés du triangle. Ce sont les hauteurs des trois triangles.

Ainsi

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{OF \times AB}{2} + \frac{OE \times AC}{2} + \frac{OD \times BC}{2} = \frac{1}{2} r(AB + AC + BC)$$

1. b) Dans le triangle BAD rectangle en D, $\sin t = \frac{BD}{BA}$

Comme le triangle ABC est isocèle en A, la bissectrice issue de A est aussi la médiane et donc D est le milieu de [BC].

Donc $\sin t = \frac{BD}{BA} = \frac{\frac{1}{2}BC}{a} = \frac{BC}{2a}$ soit $BC = 2\ a\ sint$

1. c) On sait que $S = \frac{1}{2} r(AB + BC + AC)$

On remplace les longueurs par les valeurs : $S = \frac{1}{2} r(a + a + 2a\ sint)$ et on donne $S = \frac{1}{2} AB \times AC \times sin\hat{A}$

Donc $ar(1 + sint) = \frac{1}{2} a^2 \sin(2t)$ ce qui est équivalent à $r = \frac{1}{2} a \frac{\sin(2t)}{sint+1}$

2. a) $f(t) = \frac{\sin(2t)}{sint+1}$ on calcule sa dérivée : $f'(t) = \frac{(2\cos(2t))(1+sint) - sint(2t)cost}{(1+sint)^2 x}$

On utilise les égalités : $\cos(2t) = 1 - 2sin^2 t$ et $\sin(2t) = 2cost \times sint$

$$f'(t) = \frac{2(1 - 2sin^2 t)(1 + sint) - 2cos^2 t sint}{(1 + sint)^2}$$

On utilise l'égalité : $cos^2 t = 1 - sin^2 t$ puis la 3e identité remarquable appliquée à $1 - sin^2 t$

$$f'(t) = \frac{2(1 - 2sin^2 t)(1 + sint) - 2(1 - sin^2 t)sint}{(1 + sint)^2} = \frac{2(1 - 2sin^2 t)(1 + sint) - 2(1 - sint)(1 + sint)sint}{(1 + sint)^2}$$

On factorise par $2(1 + sint)$, puis on factorise par (-1) dans la 2e parenthèse :

$$f'(t) = \frac{2(1 + sint)(1 - 2sin^2 t - sint + sin^2 t)}{(1 + sint)^2} = \frac{-2(1 + sint)(sin^2 t + sint - 1)}{(1 + sint)^2}$$

Ainsi comme 2>0 et le dénominateur, en tant que carré est aussi positif,

alors f' est bien du signe de$-(sint + 1)(sin^2 t + sint - 1)$

2. b) Comme $-1 \leq \sin t \leq 1$ alors $\sin t + 1 \geq 0$

Pour le signe de $sin^2 t + sint - 1$:

Posons $X = \sin t$ alors on cherche le signe de $X^2 + X - 1$, son discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 5$

Il y a deux racines $X_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $X_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$, comme $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ alors $\sin t \geq 0$.

Le polynôme est positif en dehors des racines et négatif entre les racines.

Ainsi $sint = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ soit $t = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0{,}66\ rad \approx 37{,}8°$

<u>Tableau de variations :</u>

x	0		$0{,}66$		$\frac{\pi}{2}$
$-(sint+1)$		$-$		$-$	
$\sin^2+sint-1$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

On rappelle que $r = \frac{1}{2} a \frac{\sin(2t)}{sint+1}$

Ainsi r est maximal lorsque f est maximale à savoir pour $t = 0{,}66\ rad$

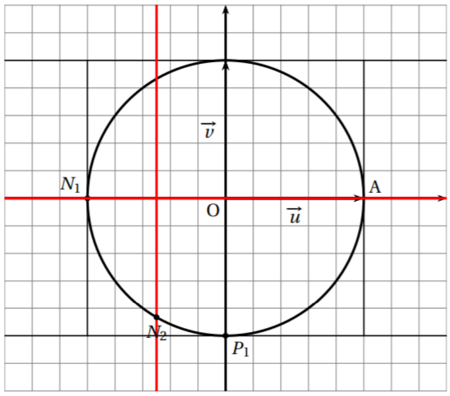
donc $\hat{A} \approx 1{,}32\ rad$

$f(0{,}66) \approx 0{,}6$

Donc le rayon vaut $r = \frac{1}{2} af(0{,}66) = 0{,}3a$

Exercice 2 : Centre étranger juin 2019

Partie A : étude d'exemples



1. Un premier exemple

   Dans cette question, on pose $z = \mathrm{i}$.

   (a) $z = \mathrm{i}$ donc $z^2 = \mathrm{i}^2 = -1$ et $\frac{1}{z} = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

   (b) On place N_1 et P_1.

   On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. **Une équation**

   Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z :
   $z^2 + z + 1 = 0$:
   $\Delta = -3 < 0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :
   $z_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

3. Un deuxième exemple

   Dans cette question, on pose : $z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (a) On remarque que $z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   Alors $z^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $\frac{1}{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

   (b) Plaçons les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.

   On remarque que $N_2 = P_2$. On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés. (en effet, $N_2 = P_2$)

Partie B

1. Pour tout $z \neq 0$, $z^2 - \frac{1}{z} = z^2 + z + 1 - z - 1 - \frac{1}{z} = z^2 + z + 1 - \left(z + 1 + \frac{1}{z}\right) = z^2 + z + 1 - \frac{1}{z}\left(z^2 + z + 1\right) = \boxed{\left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right)}$.

2. Pour $z \neq 0$, on a : $\overrightarrow{PN}$ a pour affixe $\left(z^2 - \frac{1}{z}\right)$ et $\overrightarrow{PA}$ a pour affixe $\left(1 - \frac{1}{z}\right)$.

   $\overrightarrow{PN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{PA} \iff \exists k \in \mathbb{R},\ z^2 - \frac{1}{z} = k\left(1 - \frac{1}{z}\right)$ soit d'après le résultat précédent :

   $\iff \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = k\left(1 - \frac{1}{z}\right)$

   $\iff \left(z^2 + z + 1 - k\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0$

   $\iff z^2 + z + 1 - k = 0$ ou $1 - \frac{1}{z} = 0$

   $\iff z^2 + z + 1 = k$ ou $z = 1$.

   Or, si $z = 1$, $z^2 + z + 1 = 3 \in \mathbb{R}$. Donc dans les deux cas $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.

   On a donc montré que N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.

   $z^2 + z + 1 = (x + \mathrm{i}y)^2 + x = \mathrm{i}y + 1 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + x + \mathrm{i}y + 1 = \boxed{x^2 + y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y)}$.

4. (a) A, N et P soient alignés si, et seulement si, $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.

   Or : $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}}$.

   Les solutions appartiennent donc aux droites d'équations $\boxed{y = 0}$ et $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$.

   (b) z doit être non nul, donc l'ensemble cherché est l'axe des réels privé de l'origine et la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.