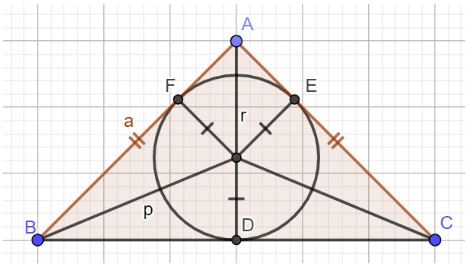
Vacances de Noël

Nombres complexes *Fonctions trigonométriques*	**Devoir maison n°4**	Nom : Classe TS2

<u>Exercice 1 :</u> ABC est un triangle isocèle en A d'aire S donnée. On cherche pour quel angle $\hat{A}$ le rayon du cercle inscrit au triangle est maximal.



Soit $2t$ l'angle $\hat{A}$ du triangle, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, a la longueur AB et r le rayon du cercle inscrit au triangle.

<u>Rappel</u> : le centre du cercle inscrit est l'intersection des bissectrices des angles.

1. a) Montrer que $S = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC)$ (penser à décomposer le triangle en plus petites figures)

b) Exprimer BC en fonction de a et de t.

c) On rappelle que $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin \hat{A}$

En déduire que $r = \frac{1}{2}a\frac{\sin(2t)}{1+\sin(t)}$

2. Soit $f(t) = \frac{\sin(2t)}{1+\sin(t)}$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que $f'(t)$ a même signe que $-(\sin t + 1)(sin^2 t + \sin t - 1)$ (on a : $\cos(2t) = cos^2 t - sin^2 t = 1 - 2sin^2 t$)

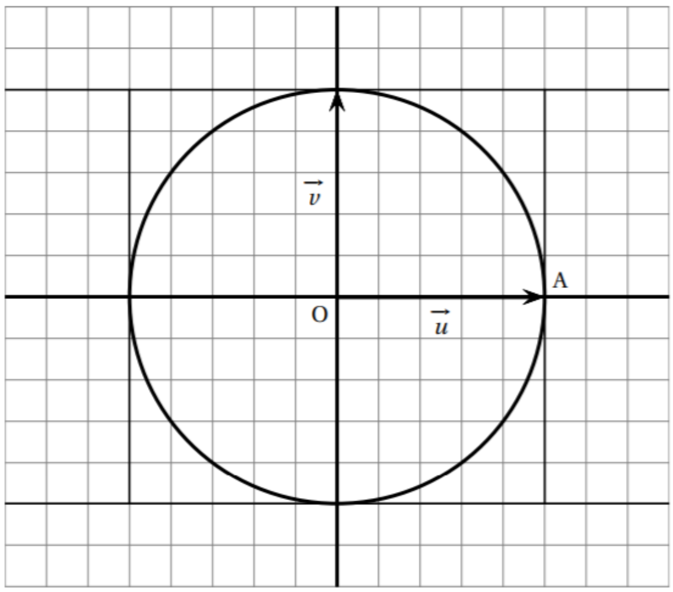
b) Pour quelle valeur de t, $\frac{\sin(2t)}{1+\sin(t)}$ est-il maximal ? Donner une valeur approchée à 10^{-2}près

3. Conclure.

<u>Exercice 2</u> : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixe 1, z^2, $\frac{1}{z}$ soient alignés.

Sur le graphique ci-contre, le point A a pour affixe 1.



<u>Partie A : étude d'exemples</u>

1. Un premier exemple

Dans cette question, on pose $z = i$

a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

b) Placer les points N1 d'affixe z^2 , P1 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique.

Que remarque-t-on pour les points A, N1 et P1 ?

2. Une équation

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$

3. Un 2^{e} exemple

Dans cette question, on pose $z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

a) Déterminer la forme exponentielle de z, puis celles des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

b) Placer les points N2 d'affixe z^2 , P2 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique.

Que remarque-t-on pour les points A, N1 et P1 ?

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.

On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

1. Etablir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

2. Montrer que les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + iy$ où x et y désignent des nombres réels.

Justifier que $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$

4. a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique.