Chapitre VIII : Fonction exponentielle

Rappel dérivée d'une composée par une fonction affine

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, a, b deux nombres réels avec $a \neq 0$
La fonction $g : x \to f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = af'(ax+b)$

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

Définition de la fonction exponentielle

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$
On note provisoirement cette fonction exp.

Conséquences immédiates

- La fonction exponentielle, $exp : x \to exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $exp'(x) = exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $exp(0) = 1$

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et b, $exp(a+b) = exp(a)\,exp(b)$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x) \neq 0$ et $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$
Pour tous nombres a et b, $exp(a-b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}$
Pour tout nombre x et tout entier relatif n, $exp(nx) = (exp(x))^n$

Remarque : la fonction exponentielle transforme les sommes en produit

Une nouvelle notation

On pose $exp(1) = e$; on obtient $e \simeq 2,718$, e est appelé le nombre d'Euler.
D'après le théorème : $exp(nx) = (exp(x))^n$, on obtient $exp(n) = (exp(1))^n = e^n$
On étend cette égalité à l'ensemble des nombres réels : $exp(x) = e^x$

Remarque : On lit "exponentielle x" ou "e exposant n"

Conséquences

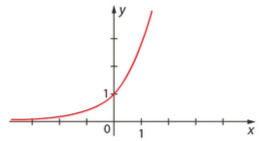
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- Pour tous nombres a et b, $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- Pour tout nombre a, et pour tout entier relatif n, $\left(e^a\right)^n = e^{na}$

Variations

f est définie sur $\mathbb{R}$; f est strictement positive sur $\mathbb{R}$
$f'(x) = exp(x) = e^x$; f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
exp	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe



Limites

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Autres limites

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Equations - Inéquations

a) Pour tous réels a et b, $a = b$ est équivalent à $e^a = e^b$
b) Pour tous réels a et b, $a \leq b$ est équivalent à $e^a \leq e^b$

Propriété

Soit u une fonction définie sur un intervalle I. On considère la composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle : $x \to u(x) \to e^{u(x)}$. On note e^u cette composée.
La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, donc l'ensemble de définition de e^u est le même que celui de u

1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors e^u est dérivable sur I et
$$\left(e^u\right)' = u' \times e^u$$
2. La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u