Fonction logarithme - Suites *Géométrie dans l'espace*	**Devoir maison n°5**	Nom : Classe TS2

Exercice 1 : f est une fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

La courbe C représentative de f est donnée ci-dessous. Δ est la droite d'équation $y = x$

Partie A : Etude de certaines propriétés de C

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f. Justifier.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$

3. Pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$, on pose :

$$N(x) = (1+x)^2 + \ln(x+1) - 1$$

a) Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$

b) Calculer $N(0)$ et déduisez-en les variations de f.

3. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite Δ.

Partie B : Etude d'une suite convergente

1. Démontrer que si $x \in [0\,;4]$ alors $f(x) \in [0\,;4]$

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Grâce à la calculatrice, conjecturer les variations de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

b) Tracer sur le graphique les dix premiers termes de la suite (u_n)

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;4]$

d) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

e) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Aides :

1. Tracer les premiers termes d'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$:
Vidéos :

- kiffelesmaths : https://www.youtube.com/watch?v=-p6yQhuvy6A ou
- jaicompris maths : https://www.youtube.com/watch?v=CUXWjKWB5VU

2. Limite d'une suite définie par récurrence

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un nombre réel.

Notons (u_n) la suite définie par :

$u_0 =$ a et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = f(u_n)$

Si on démontre que la suite (u_n) est convergente vers un nombre réel ℓ et que la fonction f est continue en ℓ, alors en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient l'égalité $f(\ell) = \ell$.

Ce qui veut dire que si une suite (u_n) converge alors sa limite est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$.

Mais attention: Trouver la ou les solutions de l'équation $f(\ell) = \ell$ ne prouve pas que la suite (u_n) converge. La convergence de la suite (u_n) dépend aussi de son premier terme u_0 (voir les exemples donnés dans le paragraphe suivant)

Exercice 2 : On suppose que les fonctions sont définies sur leur ensemble de définition. Calculer la dérivée des fonctions

1. $f(x) = e^x + 2x - e^3$
2. $f(x) = 2xe^x$
3. $f(x) = (5x^2 - 2x)e^x$
4. $f(x) = (e^x + 2)(e^x - e)$
5. $f(x) = \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 3}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x-3}}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 1}$
8. $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{3 + \cos x}$
9. $f(x) = \cos^5 x$
10. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x}{2-x}}$

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

1. $u_n \geq 0$
2. $u_{n+1} \leq u_n$

Exercice 4 : Dans chaque cas, tracer la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK).
On nommera les points de construction. Ecrire un petit texte qui explique la construction