Fonction logarithme - Suites *Géométrie dans l'espace*	**Corrigé du devoir maison n°5**	Nom : Classe TS2

Exercice 1 : f est une fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

Partie A : Etude de certaines propriétés de C

1. La fonction f est définie lorsque $x+1>0$ car la fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ soit $x>-1$

donc $D_f =]-1\,;\,+\infty[$

2. Pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}\times(x+1) - \ln(x+1)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

3. Pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$, on pose :

$$N(x) = (1+x)^2 + \ln(x+1) - 1$$

a) On calcule la dérivée de N :

$$N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2+1}{(x+1)}$$

Comme $x>-1$, $x+1>0$ et $(x+1)^2>0$ car c'est un carré donc $2(x+1)^2+1>0$, ce qui donne $N'(x)>0$.

Ainsi N est une fonction strictement croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$

b) $N(0) = (1+0)^2 + \ln(0+1) - 1 = 1+0-1 = 0$,

comme N est strictement croissante alors N est négative sur]-1 ; 0]et positive sur $[0\,;\,+\infty[$

On sait que $f'(x) = \frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{N(x)}{x+1}$, on sait que $x+1>0$

ainsi f' est négative sur $]-1\,;0]$ et f est décroissante sur $]-1\,;0]$

et f' est positive sur $[0\,;\,+\infty[$ et f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

3. On cherche les abscisses x pour lesquelles

$$f(x) = x$$

$$x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = x \iff \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \iff \ln(x+1) = 0 \iff x+1 = e^0 = 1 \iff x = 0$$

Comme ce point se trouve sur Δ, $y=0$, ainsi les coordonnées du point d'intersection des courbes sont (0 ; 0)

Partie B : Etude d'une suite convergente

1. La fonction f est strictement croissante sur [0 ; 4], $f(0)=0$ et $f(4) = \frac{-\ln(5)+20}{5} \approx 3{,}7 < 4$

Donc si $x \in [0\,;4]$ alors $f(x) \in [0\,;4]$

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

a) D'après la calculatrice, la suite (u_n) semble être décroissante de limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;4]$

Initialisation : $u_0 = 4 \in [0\,;4]$, donc la propriété est vraie au rang $n=0$

Hérédité : on suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k \in [0\,;4]$

Au rang $k+1$: $u_{k+1} = f(u_k)$ or si $u_k \in [0\,;4]$, d'après la question 1. Nous savons que $f(u_k) \in [0\,;4]$ soit $u_{k+1} \in [0\,;4]$

La propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;4]$

d) Montrons par récurrence que la suite est décroissante.

Initialisation : $u_1 = f(u_0) = f(4) = 4 - \frac{\ln(5)}{5} \approx 3{,}67 < 4 = u_0$; la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k < u_{k+1}$

Au rang $k+1$: par hypothèse de récurrence $u_k < u_{k+1}$, comme la fonction f est croissante sur $[0\,;4]$ alors

$f(u_{k)} < f(u_{k+1})$ et $u_{k+1} < u_{k+2}$; la propriété est vraie au rang $k+1$

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout n donc la suite (u_n) est décroissante.

e) Comme la suite est décroissante et minorée par zéro alors elle est convergente d'après le théorème de convergence monotone.
La limite l de la suite (u_n) vérifie : $f(l) = l$ soit $l - \frac{\ln(l+1)}{l+1} = l$, on a déjà résolu cette équation et trouvé $l = 0$
Ainsi la suite converge vers zéro.

Exercice 2 :

1. $f'(x) = e^x + 2$

2. $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = e^x(2+2x)$

3. $f'(x) = (10x-2)e^x + (5x^2-2x)e^x = e^x(5x^2-2x+10x-2) = e^x(5x^2+8x-2)$

4. $f'(x) = e^x(e^x-e) + (e^x+2)e^x = e^x(e^x-e+e^x+2) = e^x(2e^x+2-e)$

5. $f'(x) = \frac{(2e^x)(e^x+3)-(2e^x-1)e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{e^x(2e^x+6-2e^x+1)}{(e^x+3)^2} = \frac{7e^x}{(e^x+3)^2}$

6. $f'(x) = -\frac{\frac{5}{2\sqrt{5x-3}}}{(\sqrt{5x-3})^2} = -\frac{5}{2(5x-3)\sqrt{5x-3}}$ formule : $-\frac{u'}{u^2}$ avec $u = \sqrt{5x-3}$ donc $u'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$

7. $f'(x) = -\frac{4x}{(2x^2-1)^2}$ formule : $-\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 2x^2-1$ donc $u'(x) = 4x$

8. $f'(x) = \frac{(-\cos x)(3+\cos x)-(1-\sin x)(-\sin x)}{(3+\cos x)^2} = \frac{-3\cos x - cos^2 x + \sin x - \sin^2 x}{(3+\cos x)^2} = \frac{-3\cos x + \sin x - 1}{(3+\cos x)^2}$

9. $f'(x) = 5(-\sin x)cos^4 x = -5\sin x\, cos^4 x$ formule $(u^5)' = 5u'u^4$

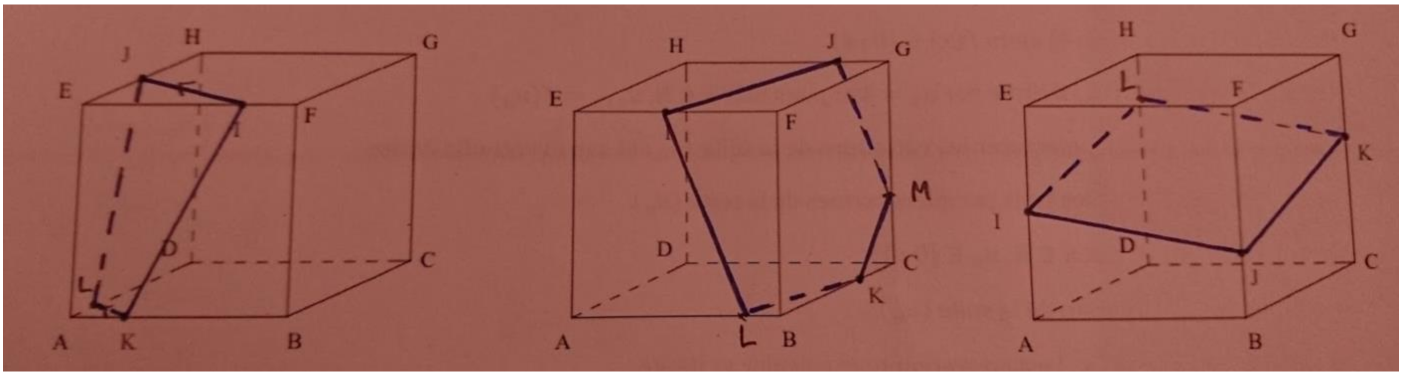
10. $f'(x) = \frac{\left(\frac{3x}{2-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{3x}{2-x}}} = \frac{\frac{3(2-x)-3x(-1)}{(2-x)^2}}{2\sqrt{\frac{3x}{2-x}}} = \frac{6}{2(2-x)^2\sqrt{\frac{3x}{2-x}}} = \frac{3\sqrt{2-x}}{(2-x)^2\sqrt{3x}}$

Exercice 3 :

1. Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 5 \geq 0$, la propriété est vraie au rang $n = 0$
2. Hérédité : on suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k \geq 0$
Au rang $k+1$: D'après l'hypothèse de récurrence, $u_k \geq 0$ donc $e^{u_k} \geq 1$ et donc $\frac{1}{e^{u_k}} \leq 1$ et $-\frac{1}{e^{u_k}} \geq -1$ et $2 - \frac{1}{e^{u_k}} \geq 2-1$
Donc $u_{k+1} \geq 1 \geq 0$, la propriété est vraie au rang $k+1$
3. Conclusion : La propriété est initialisée et herédaire ainsi elle est vraie pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

1. Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 5$ et $u_1 = 2 - e^{-5} \approx 2$ donc $u_1 \leq u_0$, la propriété est vraie au rang $n = 0$
2. Hérédité : on suppose qu'il existe un rang k tel que $u_{k+1} \leq u_k$
Au rang $k+1$: D'après l'hypothèse de récurrence, $u_{k+1} \leq u_k$ donc $e^{u_{k+1}} \leq e^{u_k}$ et $\frac{1}{e^{u_{k+1}}} \geq \frac{1}{e^{u_k}}$ donc $-\frac{1}{e^{u_{k+1}}} \leq -\frac{1}{e^{u_k}}$
On obtient $2 - \frac{1}{e^{u_{k+1}}} \leq 2 - \frac{1}{e^{u_k}}$ soit $u_{k+2} \leq u_{k+1}$, la propriété est vraie au rang $k+1$
3. Conclusion : La propriété est initialisée et herédaire ainsi elle est vraie pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

<u>Exercice 4</u> :



<u>Figure 1 :</u>

1. On trace le segment [IJ], les points I et J appartiennent au même plan (EFG)
2. On trace le segment [IK], les points I et K appartiennent au même plan (ABF)
3. On trace la parallèle à (IJ) passant par K car les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles. On note L le point d'intersection entre [AD] et cette parallèle.
4. On trace le segment [LJ], les points L et J appartiennent au même plan (ADH).

Le polygone IJLK est la section du cube par le plan (IJK).

<u>Figure 2 :</u>

1. On trace le segment [IJ], les points I et J appartiennent au même plan (EFG)
2. On trace la parallèle à (IJ) passant par K, elle coupe [AB] en L.
3. On trace le segment [IL], les points I et L appartiennent au même plan (ABF)
4. On trace la parallèle à (IL) passant par J, elle coupe [GC] en M
5. On trace le segment [JM], les points J et M appartiennent au même plan (DCG)

Le polygone IJMKL est la section du cube par le plan (IJK).

<u>Figure 3 :</u>

1. On trace le segment [IJ], les points I et J appartiennent au même plan (ABF)
2. On trace le segment [KJ], les points K et J appartiennent au même plan (BCG)
3. On trace la parallèle à (IJ) passant par K, elle coupe [HD] en L.
4. On trace le segment [IL], les points I et L appartiennent au même plan (ADH)

Le polygone IJKL est la section du cube par le plan (IJK).