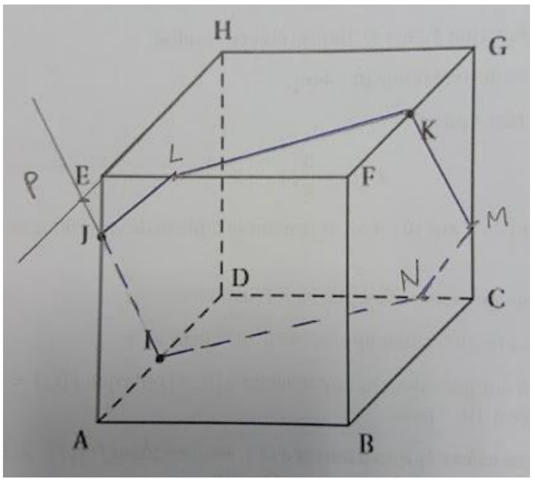
Fonction exponentielle Géométrie dans l'espace	**Corrigé du contrôle n°5 – 1h45min**	Nom : Classe : TS2

Exercice 1 :

1. Le point I appartient à (AD) incluse dans le plan (ADH)
Le point J appartient à (AE) incluse dans le plan (ADH)
Ainsi la droite (IJ) est incluse dans le plan (ADH).
La droite (EH) est incluse dans le plan (ADH).
Les droites (EH) et (IJ) sont coplanaires. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point P.
Ce point P appartient à (IJ) donc au plan (IJK) et appartient à (EH) donc c'est l'intersection de (IJK) et (EH).



2. On trace P le point d'intersection de (IJ) et (EH)
On trace la droite (PK), elle coupe [EF] en L.
On trace la parallèle à (IJ) passant par K, elle coupe [GC] en M.
On trace la parallèle à (LK) passant par I, elle coupe [DC] en N.
On trace [NM].
L'hexagone IJLKMN est la section du cube par le plan (IJK)

Exercice 2 :

1. Dans le plan P, le triangle ABC est rectangle, donc les droites (AC) et (AB) sont perpendiculaires en A.

La droite d est orthogonale au plan P, donc elle est orthogonale à toutes les droites du plan P, en particulier, elle est orthogonale à la droite (AC). Donc la droite (AC) est orthogonale à la droite (BD).

Les droites (DB) et (BA) sont sécantes en B.

La droite (AC) est orthogonale à deux droites (AB) et (BD) sécantes, incluses dans le plan (BAD), donc d'après la propriété : si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale au plan, on en déduit que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

2. Comme la droite d est orthogonale au plan P, elle est orthogonale en particulier à (BA) et (BC).
On en déduit que le triangle BAD est rectangle en B et le triangle BCD est rectangle en B.
Comme (AC) est orthogonale au plan (BAD), elle est orthogonale à toutes les droites du plan en particulier à (AD), ainsi le triangle ADC est rectangle en A.
On sait déjà que le triangle ABC est rectangle en A.
En conclusion, les quatre faces du tétraèdre sont des triangles rectangles, le tétraèdre est un bicoin.

3. BCD est rectangle en B donc CD>BD et CD>CB.
ADC est rectangle en A donc CD>AD et CD>AC
ABC est rectangle en A donc BC>AB et BC>AC, or CD>BC donc CD est supérieur aux cinq autres arêtes du tétraèdre.

4. BCD est rectangle en B donc I le milieu de [CD] est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD et IC=IB=ID
ADC est rectangle en A donc I le milieu de [CD] est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD et IC=IA=ID
On en déduit que IA=IB=IC=ID, I est équidistant des 4 quatre sommets du tétraèdre.

Exercice 3 :

1.

a) On calcule $f(0) = 3 \times 0 \times e^{-\frac{1}{4}\times 0} + 2 = 2$, le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$ est 2 $\mu g/mL$.

b) Attention le temps est en minutes, donc $12s = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}min$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = 3 \times \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}} + 2 \approx 2{,}57 > 2{,}5$$

Le taux de vasopressine est supérieur à 2,5 $\mu g/mL$ donc considéré comme pas normal.

c) Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{4}t = +\infty$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{3t}{e^{\frac{1}{4}t}} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{3t}{e^{\frac{1}{4}t}} + 2 = 2$

2. On calcule la dérivée de $f(t) = 3te^{-\frac{1}{4}t} + 2$, c'est une somme de fonctions avec une forme "uv".

$$f'(t) = 3e^{-\frac{1}{4}t} + 3t \times \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-\frac{1}{4}t} = \frac{3}{4}(4-t)e^{-\frac{1}{4}t}$$

3. a) La fonction $t \to e^t$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
La fonction $t \to 4 - t$ est positive sur $[0\,;4]$ puis négative sur $[4\,;\,+\infty[$

Tableau de variation :

x	0	4	$+\infty$
$4-t$	$+$	0	$-$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$2 \nearrow$	$f(4)$	$\searrow 2$

3. b) Le taux est maximal lorsque $f'(t) = 0$ et change de signe, ce qui se passe pour $t = 4$.

Donc au bout de 4 minutes, le taux de vasopressine est maximal.

Sa valeur maximale est $f(4) = 3 \times 4e^{-\frac{1}{4}\times 4} + 2 \approx 6{,}41$ $\mu g/mL$

4. a)

- La fonction f est continue sur $[0\,;4]$ car composée de fonctions continues.
- La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;4]$.
- $2{,}5 \in [2\,;6{,}41] = [f(0); f(4)]$
- D'après le corollaire du TVI, il existe un unique $t_0 \in [0\,;4]$ tel que $f(t_0) = 2{,}5$

D'après la calculatrice, $t_0 \approx 0{,}174min \approx 10{,}44\ s$

4. b) Comme la fonction est croissante sur $[0\,;4]$ et décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$ telle que $f(t_0) = f(t_1) = 2{,}5$

Alors le taux reste supérieur à la normale sur l'intervalle $[t_0\,;\,t_1] = [0{,}174min\,;18{,}930min]$

Soit pendant $t_1 - t_0 = 18{,}930 - 0{,}174 \approx 18{,}756min \approx 18$ min $et\ 45\ s$.