Chapitre X : Logarithmes

Définitions : fonction logarithme népérien

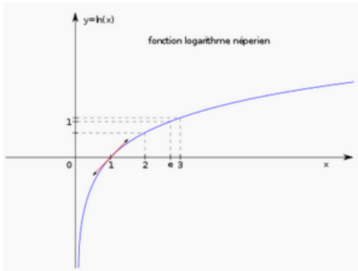
1. On appelle logarithme népérien du réel strictement positif k, l'unique solution de l'équation $e^{a} = k$.
On note cette solution $a = \ln k$.

2. La fonction logarithme népérien est la fonction qui, à tout **réel strictement positif** x associe $y = \ln x$
$\ln : \mathbb{R}^{*}_{+} \to \mathbb{R},\ x \to \ln x$

$y = \ln x$ et $x > 0$ équivaut à $e^{y} = x$

Propriétés

1. La fonction $\ln$ est définie et continue sur $]0\,;\ +\infty[$
2. Pour tout réel x, $\ln(\exp(x)) = x$ soit $\ln(e^{x}) = x$
3. Pour tout réel strictement positif x, $\exp(\ln(x)) = x$ soit $e^{\ln x} = x$
4. $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
5. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
6. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;\ +\infty[$ soit
$a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$
7. Si $0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln x < 0$ et $x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0$
8. Pour tous réels a et b strictement positifs :
$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$



Théorème

Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Limites aux bornes de l'ensemble

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \ln x = -\infty$

Propriétés

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

- Puissance positive : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^{n}) = n\ln a$
- Inverse : $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$
- Quotient : $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- Puissance négative : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^{-n}) = -n\ln a$
- Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

Autres limites

a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ c) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

Fonction composée avec la fonction $\ln$

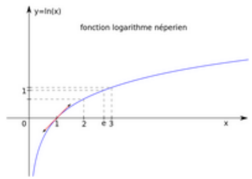
Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur l'intervalle I.
On considère la fonction composée g définie par $g = \ln \circ u$ soit pour tout $x \in I$, $g(x) = \ln(u(x))$
On la note $g = \ln u$.
La fonction $\ln u$ est définie sur I et dérivable sur cet intervalle et $(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

En résumé

x	0		1		e		$+\infty$
ln'(x)				+			
lnx	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de lnx		-	0		+		

La fonction $\ln$: $]0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R},\ x \to \ln x$ est une fonction strictement croissante.

Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \ln x = -\infty$



Définition du logarithme décimal

On appelle logarithme décimal, la fonction notée $\log$ définie sur $]0\,;\ +\infty[$ par : $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Propriétés du logarithme décimal

a. $\log_{10} 10 = 1$ b. $\log_{10} 1 = 0$

c. e. $\log_{10}(a \times b) = \log a + \log b$ $\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) = \log_{10} a - \log_{10} b$ $\log_{10}\left(a^{n}\right) = n\log_{10} a$

En résumé

La fonction $\log_{10}$ est définie et dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$
La fonction $\log_{10}$ est strictement croissante sur cet intervalle. Ici $a = 10$.

x	0		1		a		$+\infty$
$\log'_a(x) = \frac{1}{x\ln a}$		+		+		+	
$\log_a(x)$	$-\infty$		0		1		$+\infty$