Synthèse :Chapitre XII : Intégration et primitives - partie I

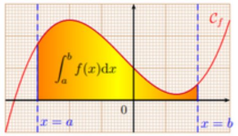
Définition d'une unité d'aire

Dans un repère (O, I, J), on appelle unité d'aire (u.a), l'aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ].

Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$.
On considère la fonction f **continue et positive sur** $[a\,;\,b]$
On appelle l'intégrale de a à b de la fonction f l'aire (en unités d'aires du repère) de la surface du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

Cette aire est notée : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Elle se lit : intégrale de a à b de f
a est appelé la borne inférieure
b est appelé la borne supérieure
Les intégrales peuvent servir à calculer des aires de figures non usuelles

Théorème fondamental

Si f est une fonction continue et positive sur $[a\,;\,b]$, la fonction F définie sur $[a\,;\,b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et a pour dérivée f. On a ainsi $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$

Définition d'une primitive d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est égale à f.
Ainsi pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Théorème d'existence des primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Propriétés

- Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors toutes les primitives de f sont les fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.
- Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ pour n entier différent de -1 et 0	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ lorsque $n > 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ lorsque $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Formes remarquables

Primitive de la somme	$\int(u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un scalaire	$\int(au) = a\int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} = \ln\|u\|$
Primitive de $\frac{u'}{u^n}$ $n \neq 1$	$\int \frac{u'}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \frac{1}{a}U(ax+b)$