Chapitre XIII : Géométrie vectorielle

1) Vecteurs dans l'espace

Propriétés des vecteurs

-Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{CD}$sont égaux ssi ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati)
-Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\vec{v}$=k$k\vec{u}$ où k est un réel.
Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
-Les points A, B, et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

Définition : Vecteurs coplanaires

Des vecteurs sont coplanaires ssi leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace

Soient A et B deux points distincts.
Un point M appartient à la droite (AB) ssi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}$=t$\overrightarrow{AB}$

Caractérisation vectorielle d'un plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$=x$\vec{u}$+y$\vec{v}$ avec x, y des réels quelconques est un plan passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Propriété

Soient A, B et C trois points non alignés.
Un point M appartient au plan (ABC) ssi il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM}$=x$\overrightarrow{AB}$+y$\overrightarrow{AC}$

Propriétés

-Trois vecteurs$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe trois réels a, b, c non tous nuls tels que a$\vec{u}$+b$\vec{w}$+c$\vec{w}$=$\vec{0}$

-Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires ssi il existe a$\vec{u}$+b$\vec{v}$+c$\vec{w}$=$\vec{0}$ implique que a=b=c=0

Propriétés

-Une droite D est parallèle à un plan P ssi un vecteur directeur de D est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de P

-Deux plans P et P' sont parallèles ssi deux vecteurs non colinéaires du plan P sont respectivement égaux à deux vecteurs du plan P'.

2) Repérage dans l'espace $\vec{k}$

Décomposition d'un vecteur dans une base

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet (x ; y ; z) tel que $\vec{u}$=x$\vec{i}$+y $\vec{j}$+z$\vec{k}$

Définitions

Un repère de l'espace est un quadruplet (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) avec O un point appelé origine du repère et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Pour tout point M de l'espace, il existe un triplet (x ; y ; z) tel que $\overrightarrow{OM}$=x$\vec{i}$+y $\vec{j}$+z$\vec{k}$; ce triplet s'appelle les coordonnées de M dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$). On note M(x ; y ; z)
X s'appelle l'abscisse ; y s'appelle l'ordonnée et z s'appelle la cote.
On dit que le repère est orthonormé si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

Propriétés

Soient $\vec{u}$(x ; y ; z) et $\vec{v}$(x' ; y' ; z') deux vecteurs dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$)de l'espace.

-$\vec{u}$=$\vec{v}$ est équivalent à x=x' ; y=y' ; z=z'

-$\vec{u}$+$\vec{v}$(a pour coordonnées (x+x' ; y+y' ; z+z')

-Si kℝ, k$\vec{u}$ a pour coordonnées (kx ; ky ; kz)

Propriétés

Soient A (xA ; yA ; zA) et B(xB ; yB ; zB)deux points de l'espace rapporté au repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$).

-AB a pour coordonnées $(\mathrm{xB} - \mathrm{xA}\,;\ \mathrm{yB} - \mathrm{yA}\,;\ \mathrm{zB} - \mathrm{zA})$

-Le milieu I de [AB] a pour coordonnées
$\left(\frac{xA-xB}{2}\right);\left(\frac{yA-yB}{2}\right);\left(\frac{zA-zB}{2}\right)$

-Si le repère est orthonormé, $\mathrm{AB} = \sqrt{(\mathrm{xB}-\mathrm{xA})^2 + (\mathrm{yB}-\mathrm{yA})^2 + (\mathrm{zB}-\mathrm{zA})^2}$

3) Systèmes d'équations paramétriques

Représentation paramétrique d'une droite

Soit D une droite passant par le point A (xA ; yA ; zA)et de vecteur directeur $\vec{u}$(a ; b ; c)
Un point M de coordonnées (x ; y ; z) appartient à D ssi il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

Propriété

Soient x0 ; y0 ; z0 ; a ; b ; c des réels tels que (a ; b ; c)(0 ; 0 ; 0)
Le système d'équations, avec tℝ ,

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

définit une représentation paramétrique de la droite D passant par A(x0 ; y0 ; z0)et de vecteur directeur $\vec{u}$(a ; b ; c)
Le réel t s'appelle le paramètre du point M.

Représentation paramétrique d'un plan

Soit P le plan passant par A(xA ; yA ; zA)et dirigé par les vecteurs u(a ; b ; c)et v(a' ; b' ; c')
Un point M de coordonnées (x ; y ; z) appartient à P ssi il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = xA + tA + t'A' \\ y = yA + tb + t'b' \\ z = zA + tc + t'c' \end{cases}$$

Propriété

Soient x0 ; y0 ; z0 ; a ; b ; c ; a' ; b' ; c' des réels tels que (a ; b ; c)et (a' ; b' ; c') ne soient pas proportionnels.
Le système d'équations, avec (t ; t')€ $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x = x_0 + ta + t'a' \\ y = y_0 + tb + t'b' \\ z = z_0 + tc + t'c' \end{cases}$$

définit une représentation paramétrique d'un plan P passant par A (xA ; yA ; zA)et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$(a ; b ; c)et $\vec{v}$(a' ; b' ; c')
Le couple (t ; t') est le couple de paramètres du point M.