Chapitre 15 : Lois de Probabilité à densité

Loi à densité sur un intervalle

- <u>Définition : variable aléatoire continue</u>

Une variable aléatoire continue X est une fonction qui à chaque issue de Ω associe un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- <u>Définition : fonction de densité de probabilité</u>

On dit qu'une fonction est une fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X sur I si :
f est définie, continue et positive sur I

$$\int_I f(x)dx = 1$$

- Si $I=[a;b]$ alors $\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- Si $I=[a;+\infty[$ alors $\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$
- Si $I=]-\infty;a]$ alors $\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\mathrm{d}x$

- <u>Définition : loi de probabilité</u>

Dire que P est la loi de probabilité de densité f de X signifie que pour tout intervalle J inclus dans I, la probabilité $P(X\in J) = aire\ du\ domaine\ \{M(x\ ;\ y)\ ;\ x\in J\ et\ 0\le y\le f(x)\}$

Si $J=[a\ ;\ b]$, $P(X\in[a;b]) = P(a\le X\le b) = \int_a^b f(x)dx$

- <u>Propriétés</u>

- Pour tout $c\in I$, $P(X=c) = \int_c^c f(x)dx = 0$
- Pour tous réels $c, d\ \in I$, $P(c\le X\le d)$
$= P(c\le X<d)$
$= P(c<X\le d)$
$= P(c<X<d)$
- Pour tout $c\in I$, $P(X>c) = 1-P(X\le c)$
- Pour tous réels $c,d\ \in I$,
$P(c<X<d) = P(X<d) - P(X\le c)$

- <u>Définition : Espérance mathématique</u>

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur l'intervalle $[a\ ;b]$ alors l'espérance mathématique est le réel défini par :

$$E(X) = \int_a^b tf(t)dt$$

- <u>Définition : **loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$**</u>

a et b désignent deux nombres réels distincts avec $a<b$.
Dire qu'une variable aléatoire suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ signifie que la densité de probabilité est une fonction constante sur $[a\ ;\ b]$.
On écrit $X \rightsquigarrow U[a\ ;\ b]$

- <u>Propriété : densité</u>

La densité de probabilité de la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ est la fonction définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

- <u>Propriété : probabilité d'un événement</u>

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$
Pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus dans $[a\ ;\ b]$:

$$P(c\le X\le d) = \frac{d-c}{b-a}$$

- <u>Espérance</u>

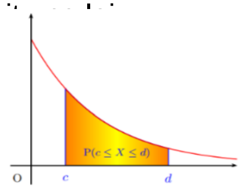
X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$
Son espérance est : $E(X) = \frac{a+b}{2}$

- <u>Définition : **lois exponentielles**</u>

λ désigne un nombre réel strictement positif.
Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\ ;\ +\infty[$ signifie que sa densité de probabilité définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

- <u>Propriété</u>

X est une variable aléatoire qui su
exponentielle de paramètre λ.
Pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus d



$P(c\le X\le d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
$P(X\ge c) = e^{-\lambda c}$
$P(X\le d) = 1-e^{-\lambda d}$

- <u>Propriété : durée de vie sans vieillissement</u>

Si T est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h :
$P_{T\ge t}(T\ge t+h) = P(T\ge h)$

Dém : Soit A l'événement "$T\ge t+h$" et B l'événement "$T\ge t$", alors $A\subset B$ donc $A\cap B = A$

$$P_{T\ge t}(T\ge t+h) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(T\ge t+h)}{P(T\ge t)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}\times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h}$$
$$= P(T\ge h)$$

- <u>Espérance</u>

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Son espérance est : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$