Chapitre XIV intégration et primitives

Propriété : calcul d'une intégrale

Soit f une fonction **continue et positive sur un intervalle** $[a\,;\,b]$.
Si F est une primitive de la fonction f alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Définition : Généralisation de la notion d'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive de f, a et b sont deux réels quelconques de I.
On appelle intégrale de f entre a et b la différence $F(b) - F(a)$
On note cette intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Conséquence immédiate

Si f est continue sur $[a\,;\,b]$, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Inégalités

Si pour tout nombre $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Si pour tout nombre $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Si pour tout nombre $x \in [a\,;\,b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Propriétés algébriques

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. **Linéarité** : Pour tout réel k, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)+g(x)dx$

3. **Relation de Chasles** $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$:

Valeur moyenne

Pour toute fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;\,b]$ le réel m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$