Oral 1

Tirage :

- **218** Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
- **256** Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.

Préparation :

Je n'avais préparé aucune de ces deux leçons. La première est du genre « boaf, fastoche, je saurai faire le jour J », et la deuxième est du genre « trop spécifique, je la travaillerai pour les années prochaines, quand j'en serai à fignoler ».

Je décide quand même de me diriger vers les formules de Taylor, mais au bout de quelques minutes je panique un peu à l'idée de ne trouver aucun développement convenable. Les deux bouquins de leçons « toutes faites » que j'ai et qui traitent cette leçon proposent des développements pas folichons et un peu hors sujet à mon goût.

Sources d'inspiration pour le plan :

- Analyse MPSI – Costantini – Editions DeBoeck
- Les Maths en tête – Analyse – Xavier Gourdon – Ellipses
- Methodi'X Analyse – Xavier Merlin - Ellipses

Comme tous les tomes de la série DeBoeck, le Costantini est très clair. J'ai beaucoup bossé avec eux en Mars 2020 lors de ma remise à niveau. Je le feuillette et je me dis que le plan va être assez facile à écrire

Cependant, je ne trouve pas de développement… J'ai donc quand même un moment de panique au bout de 40 min et regarde le Dantzer dans lequel figure un chapitre complet « accélération de convergence », en me disant que finalement, c'est pas si sorcier, et que la leçon est toute prête… Mais bon, je n'ai jamais étudié ce thème, et je me dis que c'est vraiment trop risqué. Je me reconcentre donc sur Taylor.

Le plan que je produis est assez basique, et le MéthodiX insiste bien sur la différence local / global souvent mené à mal par les candidats :

I. Formules globales (sur un intervalle)
II. Formules locales (au voisinage d'un point)
III. Applications

Je commence à rédiger en m'inspirant du Costantini, et je jette un coup d'œil au Gourdon pour avoir des exemples intéressants… Et là, révélation !
Le Gourdon énonce l'inégalité des accroissements finis avant d'énoncer l'inégalité de Taylor Lagrange… Et l'inégalité des accroissements finis faisait partie de mes développements en stock (appris dans un bouquin récent : 20 démonstrations pour l'agrégation interne de Christine Obert… Une mise en page dégueu, mais bon, grâce à ce bouquin, je suis agrégé :D)
Je pars donc sur « inégalité des accroissements finis dans un evn et application à l'inégalité de Taylor Lagrange »

Là, je reprends confiance en moi et je fignole mon plan, et révise mon développement.
J'avais prévu 1h pour le plan, 1h pour le dev, 1h de relecture de démo pour bien maîtriser… J'aurai finalement fait 1h30 pour le plan et 1h30 pour bien assurer le développement. Je sais que j'arrive devant le jury en étant « fragile ». S'il me demande de démontrer certains théorèmes de mon plan, je suis cuit !

Passage devant le jury :

Je déroule mon plan sans encombre, en ayant constamment les yeux rivés sur mes notes (avec ces sommes, ces indices, ces hypothèses différentes… j'ai peur de faire une boulette). Je me tourne régulièrement vers le jury pour expliquer les grandes idées avant de les écrire.
Je connais un de mes points forts : je parle vite et j'écris vite. Je peux donc leur parler, mais écrire également tout au tableau.
Ils me préviennent une minute avant la fin, j'évoque donc la dernière application à l'oral (développement en série entière).

Vient l'étape du développement. Je le déroule sans soucis, et je tiens 15min 03sec. La dernière étape (l'application pour déduire l'inégalité de Taylor Lagrange) se fait en mode « pilote automatique ». J'écris sans réfléchir, sans vérifier les indices… Et apparemment, je ne me suis pas trompé :D

Questions :

1. **Ils me font corriger un point faux que j'avais écrit… Une inégalité avec le sup d'une partie… Je ne m'en souviens plus trop et à vrai dire, je n'ai pas bien compris mon erreur. Je crois avoir réussi à faire illusion sur le coup car ils ont acquiescé.**

2. **Concernant mon développement**
   J : Si l'on suppose la fonction f C^1 sur [a,b], a-t-on besoin de toute cette démonstration ?
   Moi : Je regarde le tableau… Mon cerveau ne veut pas réfléchir… quelle sensation désagréable.

   J : Vous n'avez pas un moyen pour passer de l'inégalité avec f' à l'inégalité avec f, sans sortir cette grosse démonstration avec les epsilons ?
   Moi : « Ah ben si ! Si la fonction est C1, alors f ' est continue, et grâce à la positivité de l'intégrale, on peut conclure. »

3. **Le jury se regarde et s'auto-questionne. « Pas de questions sur le plan ? Sur le développement ? Bien, vous pouvez effacer nous allons vous poser des exercices. »**
   A ce moment-là, je suis un peu soulagé car je redoutais les questions sur le plan.

   M. GENEAUX ouvre le bal : On considère une fonction $f \in C^\infty(R,R)$ et P, un polynôme de degré impair tels que pour tout x réel, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq |P(x)|$. Que peut-on dire de f ?
   Aucune idée pour résoudre cet exercice alors je mise sur la réactivité. Je dis immédiatement que le polynôme étant de degré impair, ces limites aux infinis sont $-\infty$ et $+\infty$. Donc P admet une racine c. Je continue de réfléchir…
   J : Très bien, et que pouvez-vous faire avec cette racine ?
   Moi : « Et bien, écrire sa série de Taylor semblerait une bonne idée ! ».
   Je le fais, mais je ne vois pas comment conclure. Je tente des majorations un peu olé olé, et le jury me dit…
   J : On ne peut pas faire ce qu'on veut avec P, on n'a pas vraiment d'informations sur ce polynôme.
   M : Ah ! Mais puisque l'on écrit la série de Taylor sur un compact, ce polynôme est borné ! Et j'arrive finalement à conclure.

4. **Nouvel exercice : Soit $f \in C^\infty(R,R)$. On pose $F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \; si \; x \neq y \\ f'(x) \; si \; x = y \end{cases}$.**

   Montrer que F est C^∞

M : Je tente différentes choses, en expliquant qu'il ne faut pas tomber dans le piège de regarder cette fonction que selon la droite y=x… Mais je me perds un peu (je ne m'attendais pas à du « calcul diff »… que j'avais pourtant révisé quelques semaines auparavant !) Ils essayent tant bien que mal de m'aiguiller, mais je n'y arrive pas : (

Et là, cris de stupeur d'un jury « Mince, mais on a dépassé de 5 minutes !!! »
M : Je me sauve sans demander mon reste.

Impressions : Ce n'était pas la panacée, mais pas la cata non plus… J'ai bien géré mon tableau, mon timing, j'ai réussi à répondre à leurs questions, mais moyennant un peu d'aide.
Je me donnais secrètement un 10/20

Résultat : 12,20

Oral 2

Tirage :

- **325** Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.
- **357** Exercices utilisant le corps **Z**/p**Z**.

Préparation :

Aucune hésitation : je n'ai fait que très peu de géométrie. Direction les nombres premiers. Je n'ai pas spécialement préparé cette leçon, mais avec les TDs donnés à l'INSA, je connais quand même un peu le sujet, et j'ai pas mal d'exos qui peuvent se rattacher à cette leçon. Je suis donc assez confiant. Je sais d'ores et déjà que j'y mettrais le critère d'Eisenstein, et la cyclicité de (Z/pZ)*.

Sources d'inspiration pour le plan :
- Epreuve d'Exemples et Exercices – Ketrane & Elineau – Dunod
- Algèbre MP – Delaunay – DeBoeck
- Algèbre MP – Aassila – Ellipses
- Exercices de mathématiques pour l'agrégation interne – Pulkowski & Montagnon – Ellipses

Exercice 1 : Un premier exercice « basique » d'applications, avec plusieurs petites questions « de cours » et avec un « original » : Y a-t-il isomorphisme entre $(Z/pZ)^2$ et (Z/p^2Z) que je trouve chouette !

Exercice 2 : Résolution d'équations dans Z/pZ : une équation polynôme et un système d'équation, faisant intervenir les fonctions symétriques élémentaires

Exercice 3 : Cyclicité de (Z/pZ)*

Exercice 4 : Critère d'Eisenstein

Exercice 5 : Déterminer le nombre de base de $(Z/pZ)^n$.

Je suis assez content de ma planche d'exo, que j'ai sortie en 1h !

Je me lance dans la répétition de mon développement. Je choisis Eisenstein qui me semble le mieux coller au sujet. Je le fais une fois, deux fois… Et puis j'ai le cerveau un peu embrumé, alors pour me changer les idées, je re-rédige la correction des autres exercices de ma feuille si jamais on m'interroge dessus (sauf la cyclicité, que j'avais retravaillé la semaine d'avant),
Il me reste 40 min pour refaire plusieurs fois mon développement et là, malheur, je n'arrive plus à me concentrer pour bien comprendre la fin.
La présentation dans le bouquin que j'utilise est confuse et ne m'aide pas, et je commence un peu à paniquer. Je me ressaisis, et je finis les 20 dernière minutes en mode zombie du genre « j'apprends bêtement tout, si jamais je me perds en cours de route. »

Je n'ai presque pas préparé ma « présentation motivée », mais bon, je suis plutôt à l'aise dans ce genre d'exercice me dis-je… En revanche, je m'en veux d'avoir « perdu » du temps à refaire les exos de la feuille au lieu de m'attarder sur mon dev…

<u>Passage devant le jury :</u>

Je présente ma feuille d'exercices, en expliquant les diverses façons d'utiliser la notion de corps. Je suis assez content de ce que je fais pour un truc improvisé.
Cela ne dure malheureusement que 6 minutes.
Je passe ensuite au développement.
J'arrive au bout sans encombre, en recopiant le Ketrane. Je suis assez soulagé de ne pas avoir bugué.
Je tiens de nouveau tout pile 15min en accélérant un poil à la fin.

<u>Questions :</u>

Et là, c'est le drame…

1. **J : Vous avez écrit c(A1) et c(B1)… Que pouvez-vous dire là-dessus ?**

M : Je regarde ce que j'ai écris… A1 et B1 sont des polynômes à coefficients dans Q… donc définir le contenu n'a pas de sens…
Je réponds alors presqu'immédiatement: « Mais.. ça n'a pas de sens d'écrire ça ! A1 et B1 sont à coefficient dans Q. On ne peut pas définir le pgcd de leur coefficients »
J : Exact ! Alors… comment pouvez-vous corriger cela ?
M : Panique totale… Je suis sûr que c'est ce que j'ai lu dans le Ketrane… Je ne vois pas où est l'erreur, je n'arrive pas à me corriger… Je m'excuse dépité auprès du jury en leur disant que je n'arrive pas à voir où est le bug dans la démonstration.

*** À ce moment précis, je suis au fond du trou… Pour moi, ne pas maîtriser son développement est « éliminatoire »… Je m'en veux tellement à ce moment-là, et plein de choses me passent par la tête du genre : « noooon… une année de nouveau à retravailler tous les soirs et les weekends, sans voir mes enfants… Ma femme sera tellement déçue… C'est horrible… »
Bref, je suis déconfit… Mais le jury me sort de mes pensées. ***

J : Tant pis, passons à autre chose. Pouvez-vous expliquer où est la contradiction à la fin ? (j'avais conclus rapidement)
M : « Bien sur. On a p | a0 et p | b0. Donc p^2 | a0b0 = p0 … Ce qui contredit une des hypothèses.

J : Ils s'interrogent mutuellement. Pas de questions ? On part sur la cyclicité ? Approbation des autres. « Pouvez-vous résoudre votre exercice 3 »
M : Grrrrrr le seul que je n'ai pas rebossé pendant mes 3h… Mais vous voulez m'achever ou quoi ?
« Bien sur ! » répondis-je.

Je m'exécute, et je m'en sors plutôt bien malgré un petit bug à un moment, mais grâce à un petit coup de pouce du jury, j'arrive à conclure.
Je reprends du poil de la bête.

La, un des membres du jury a mal lu mon exercice sur (Z/pZ)² et (Z/p²Z). **Il a confondu un des carrés avec une étoile… A cause du covid, ils prenaient des photos avec leur smartphone… Pas facile de bien lire !**
Je résous l'exercice et il se rend compte de sa boulette et s'excuse.

J : Pouvez-vous résoudre votre exercice 5 (base de (Z/pZ)² ?
M : « Bien sûr », et je propose la résolution et je réponds à leurs quelques questions intermédiaires.

J : C'est la fin, merci
M : « Merci, et encore une fois, désolé pour le critère d'Eisenstein, mon cerveau a refusé d'analyser la situation »

Impressions : Mais pourquoi diable ai-je rajouté ces excuses à la fin, si ça se trouve, ils avaient oublié… Mais bon, trop tard !
Je ne sais que penser… J'ai « raté » mon développement, mais j'ai su faire tous les autres exercices… Et si ça se trouve, mon « erreur » est en fait minime… Bref, je ne sais pas trop quoi penser. J'estime un 10/20

Résultat : 14,40 !

Conclusion : Je vérifie à la sortie de l'épreuve le Ketrane, et il y a effectivement une belle boulette dedans :

2) ***Première étape :*** Montrons que si P n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors il n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
Soit $\gamma = c(P)$ et $P_1 = \frac{1}{\gamma}P$. Donc $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ est primitif.
Comme P est composé, par hypothèse, P_1 l'est aussi et on peut écrire $P_1 = A_1B_1$, avec A_1 et B_1 dans $\mathbb{Q}[X]$ de degrés strictement inférieurs à celui de P.
Notons α (resp. β) le produit des dénominateurs des coefficients de A_1 (resp. B_1). Alors les polynômes $A_2 = \alpha A_1$ et $B_2 = \beta B_1$ sont dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\alpha\beta P_1 = A_2B_2$. En passant aux contenus, on obtient $\alpha\beta c(P_1) = c(A_2)c(B_2) = \alpha c(A_1)\beta c(B_1)$, comme $c(P_1) = 1$ alors $\alpha \underbrace{c(A_1)}_{\in\mathbb{Z}} \beta \underbrace{c(B_1)}_{\in\mathbb{Z}} = \alpha\beta$ d'où $c(A_1) = c(B_1) = 1$ donc $c(A_2) = \alpha$ et $c(B_2) = \beta$.
Donc :

$$P = \gamma P_1 = \gamma\left(\frac{1}{\alpha}A_2\right)\left(\frac{1}{\beta}B_2\right) = \gamma\left(\frac{1}{c(A_2)}A_2\right)\left(\frac{1}{c(B_2)}B_2\right) = \left(\frac{\gamma}{c(A_2)}A_2\right)\left(\frac{1}{c(B_2)}B_2\right).$$

En posant, $A = \frac{\gamma}{c(A_2)}A_2$ et $B = \frac{1}{c(B_2)}B_2$, on a donc $P = AB$.
Comme A_2 et B_2 sont dans $\mathbb{Z}[X]$ alors on a bien $A \in \mathbb{Z}[X]$ et $B \in \mathbb{Z}[X]$.

J'ai relevé beaucoup d'erreurs dans les développements de ce livre… Mais je suis passé à côté de celle-ci.
Et en retournant voir le XENS Algèbre 1 duquel il était tiré, les explications étaient claires et limpides. Je suis tellement en colère d'avoir raté à cause de cela… J'enrage !
Mais bon, il faut passer à autre chose…

L’attente des résultats est très longue. Avec mes estimations à 10, je sais que tout va se jouer sur les écrits.. Écrits que je n’avais pas raté, mais pas non plus super bien réussi.

Après analyse de mes prestations orales, je n’ai pas suffisamment raté pour être résigné, mais je n’ai de loin pas brillé…
Le report des résultats au 12 mai sans un mot d’excuse me fait vivre un vrai calvaire : je ne sais pas ce que sera ma vie de famille l’année prochaine. Comment organiser les projets ? Serai-je en congé formation (et donc avec un salaire réduit...)
L’annonce le 12 mai à 16h du report le 17 mai est abominable…

La parution des résultats finalement le 12 mai à 17h30 me fait pousser un énorme cri de joie : je suis agrégé… Ou plutôt « nous » sommes agrégés, car sans ma femme, je n’aurais jamais pu m’y consacrer de cette façon !

Notes aux écrits :
Algèbre : 11,40
Analyse : 9,80

Je m’attendais à mieux… Au final, je me suis surestimé aux écrits, et sous-estimé à l’oral !

Mais bon, je suis agrégé, et tellement soulagé de pouvoir refaire des maths « pour le plaisir », sans avoir une échéance couperet !

Allez, en route vers d’autres projets !!!