**Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM**

Université de Strasbourg

ACADÉMIE DE STRASBOURG
*Liberté
Égalité
Fraternité*

ALSACE
Collectivité européenne

NUMWORKS

Rallye
Rallye
2022

Rapport du 50ème Rallye Mathématique d'Alsace

**UFR de mathématique
et d'informatique**
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de Strasbourg
IREM de Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY, Jean-Claude SABBAN, Dominique WEIL

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 50ème fois en 2022. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale. Elle a réuni environ 770 participants dont 46 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, douze binômes et un monôme sont primés : un prix exceptionnel, deux premiers prix, trois deuxièmes prix et sept troisièmes prix.

En Terminale, dix-huit binômes et un monôme ont été sélectionnés : deux premiers prix, huit deuxièmes prix et neuf troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu à la Collectivité européenne d'Alsace à Strasbourg. Elle est suivie d'une réception en l'honneur des lauréats.

Hommage à Jean-Claude SABBAN
1948 - 2022

Jean-Claude Sabban est brutalement décédé le 24 mai 2022.
Il faisait partie de l'équipe du Rallye Mathématique d'Alsace depuis l'édition de 2016.
Il avait à cœur de proposer tous les ans un exercice de géométrie dans les sujets donnés aux lycéens.
Jean-Claude avait une vision éclairée de l'enseignement des mathématiques en France.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 50ème édition :

- ◊ Le Rectorat de l'Académie de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ Le Département de Mathématiques
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ La Collectivité européenne d'Alsace
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ La Ville d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Haguenau
- ◊ La Ville de Molsheim
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de Saint-Louis
- ◊ La Ville de Sélestat
- ◊ La société NUMWORKS

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Vous proposent de participer à des stages de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour obtenir des informations sur toutes les activités proposées, vous pouvez consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2022

Prix exceptionnel

- ✓ CAUSSE Gaspard et DAI Charles
  Professeurs : Mme Collet et Mme Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Premier prix

- ✓ GAUZÈS Florian et KLAI Ilyes
  Professeur : Mme Collette-Clerbaut, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ BARTH Victor et DATSKEVITCH Michel
  Professeur : Mme Bachschmidt, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ MEYER Nicolas et RUAULT Edgar
  Professeur : Mme Bachschmidt, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ GAUDIN Simon et SPAT Noémie-Louise
  Professeurs : M. Vilmen et M. Bimboes, Lycée Eugène Koeberlé, Sélestat

- ✓ GASNIER Anastacia et MIGNOT Alice
  Professeur : Mme Betz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ CELIK Emirhan et SCHNEIDER Logan
  Professeurs : Mme Guth et M. Diaz, Lycée Scheurer Kestner, Thann

- ✓ CIOTTA Gauthier et SABATIER Hippolyte
  Professeurs : M. Defay et M. Broutin, Lycée Bartholdi, Colmar

- ✓ MOLIMARD Augustin et SIN Alex
  Professeurs : Mme Betz et M. Logel, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ TRITSCH Kerrian
  Professeur : Mme Brinkert, Lycée Montaigne, Mulhouse

- ✓ AIT MIMOUN Inès et MONNIER HUILIER Aurélie
  Professeurs : M. Schieffer et Mme Ebel, Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse

- ✓ DEMANGEON Axel et VELTOIS Antoine
  Professeur : Mme Mariani, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ CHEVRIER Gaël et ETTER Louis
  Professeur : M. Muntzer, Lycée Georges Imbert, Sarre-Union

Palmarès des Terminales 2022

Premier prix

- ✓ POTOCNIK Alexandre et SIBONY Lylia
  Professeurs : Mme Scheurer et M. Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ ANTHEAUME Lubin et BETTALI Loïc
  Professeur : Mme Morand, Lycée Le Corbusier, Illkirch-Graffenstaden

Deuxième prix

- ✓ OFFREDI Pierre et RIVERA Gauthier
  Professeur : Mme Senjean, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ CHAFFARD Manon et FOELLER Lucie
  Professeur : M. Matzinger, Lycée Stanislas, Wissembourg

- ✓ AMOUROUX Ernest et DE VIVEIROS FRANCO Lydia
  Professeur : M. Defay, Lycée Bartholdi, Colmar

- ✓ BUCHHOLZ Thibaut et EL JATTARI CIESLAK Adam
  Professeur : Mme Kiefel, Lycée Marie Curie, Strasbourg

- ✓ JORDAN Yves et WERLE Martin
  Professeurs : M. Alati et M. Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ OSIM Malachy et SIDIROPOULOS Philippe
  Professeur : M. Alilouch, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ MOLIMARD Solène et RAHAGA Niels
  Professeurs : Mme Scheurer et M. Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ DIYAN Gabriel et JACQUES-YONYUL Aurélien
  Professeur : M. Lutz, Lycée Kléber, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ DURAND-ROEHNER Lydie et SOTTANI Julien
  Professeur : Mme Meyer, Lycée Eugène Koeberlé, Sélestat

- ✓ FUCHS Hélène et PAQUES Eugène
  Professeur : Mme Scheurer, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ MARTIN-LANG Lise et THOMAS Julie
  Professeur : Mme Turlure, Lycée Leclerc, Saverne

- ✓ SCHNEIDERLIN Alexis
  Professeur : Mme Henriet, Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse

- ✓ BERTINCHAMPS Paul-Arthur et GUILBERT Victor
  Professeur : Mme Collette, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ ARAPI Marisola et HIRSCHMILLER Thomas
  Professeur : Mme Burck, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

- ✓ GEOFFROY Thibault et JEAN Alexis
  Professeur : Mme Collette, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ HIRSCH Constantin et WEISSGERBER Ethan
  Professeurs : Mme Meyer et M. Commun, Lycée Eugène Koeberlé, Sélestat

- ✓ DEVILLE Matthieu et FAUNY Lucas
  Professeur : M. Lutz, Lycée Kléber, Strasbourg

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2022
50ème édition

PREMIERES
Mercredi 16 mars 2022

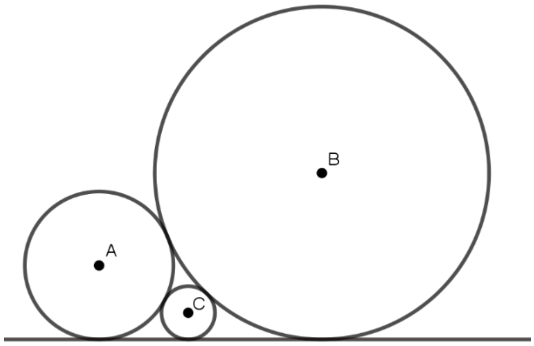
Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Pour quelles valeurs de n, le nombre 2022 est-il la somme de n entiers consécutifs ?

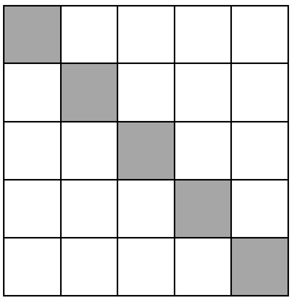
Exercice 2 :
Sur la figure ci-dessous, les trois cercles de centres A, B, C et de rayons respectifs a, b, c sont tangents entre eux et tangents à une même droite.



Démontrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

Exercice 3 :
On souhaite remplir les 25 cases de la grille ci-dessous avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5.
La grille doit vérifier les conditions suivantes :
- chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 doit figurer une seule fois dans chaque ligne et dans chaque colonne ;
- la grille doit être symétrique par rapport à la diagonale grisée.



Combien de telles grilles peut-on remplir ?

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2022
50ème édition

TERMINALES
Mercredi 30 mars 2022

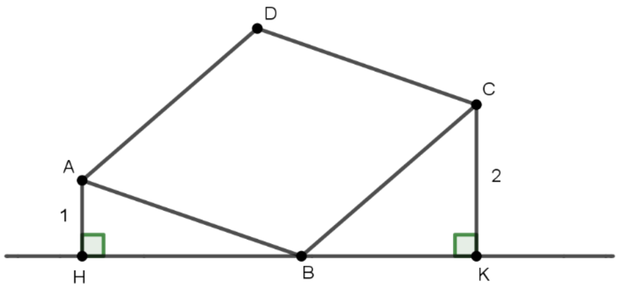
Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

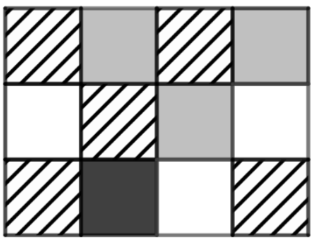
Exercice 1 :
Alain, son frère Bernard et leur cousin Claude se partagent l'exploitation d'un jardin.
Lorsqu'ils sont seuls, chacun d'eux met un nombre entier d'heures pour le bêcher. Claude est deux fois plus lent qu'Alain, mais Bernard est plus rapide qu'Alain.
Lorsqu'ils sont les trois ensemble à travailler, le jardin est bêché en 4 heures.
Combien de temps met chacun d'entre eux lorsqu'il est seul ?

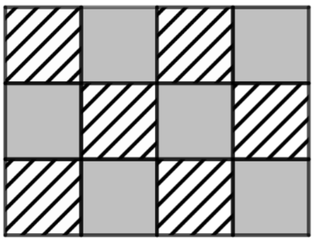
Exercice 2 :
Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un losange. Les triangles ABD et CBD sont équilatéraux.
$AH = 1$, $CK = 2$ et $B \in [HK]$.
Quelle est la longueur du côté du losange ?



Exercice 3 :
Un drapeau est constitué de trois rangées de 4 carrés. On souhaite le colorier en utilisant au plus quatre couleurs de façon que deux carrés adjacents n'aient pas la même couleur.

Voici deux exemples de coloriage :





Combien de drapeaux peut-on colorier ainsi ?

Combien parmi ces drapeaux utilisent les quatre couleurs ?

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2022

Cette année, 380 binômes (il y avait aussi quelques monômes) représentant environ 410 élèves de premières et 350 élèves de terminale ont participé aux épreuves du Rallye.
La participation est égale à celle des éditions précédentes.

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.

Nous continuons à relever que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée. Les fautes d'orthographe et de grammaire sont très nombreuses dans certaines copies ; il serait appréciable que le candidat qui ne rédige pas l'exercice relise et corrige la version de son coéquipier : cela rendrait la correction plus sereine.
C'est d'autant plus dommage que la qualité mathématique des copies est souvent d'un très bon niveau, que les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et que les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.
Lorsque le sujet comporte un exercice de géométrie, il serait souhaitable que les élèves tracent leurs figures sur une feuille annexe (proprement, à la règle et au compas et non à main levée, sans modifier le nom des points par rapport à l'énoncé), afin que les correcteurs puissent l'avoir sous les yeux lors de la lecture de l'ensemble de l'exercice.

En première, le prix exceptionnel a parfaitement résolu les trois exercices.
Les premiers prix ont très bien résolu deux exercices et ont donné des éléments dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont très bien traité un exercice et bien avancé dans un deuxième.
Les troisièmes prix ont bien résolu un exercice et donné quelques éléments dans l'un des deux autres exercices.

En terminale, les premiers prix ont donné une solution exacte à deux exercices.
Les deuxièmes prix ont tous très bien résolu un exercice et ont donné beaucoup d'éléments dans un deuxième.
Les troisièmes prix ont soit bien résolu un exercice et parfois donné quelques éléments dans un deuxième exercice soit bien avancé dans deux exercices.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.

Compte–rendu de l’épreuve de Première

Les candidats à l’épreuve du Rallye Mathématique d’Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice, il s’agissait d’écrire le nombre 2022 sous la forme d’une somme d’entiers consécutifs. Le deuxième exercice portait sur une figure géométrique comprenant trois cercles tangents entre eux et tangents à une même droite : il fallait démontrer une relation algébrique vérifiée par les rayons des trois cercles. Dans le troisième exercice, on exposait une manière de remplir une grille comportant cinq lignes et cinq colonnes et il fallait dénombrer le nombre de grilles que l’on pouvait former répondant aux contraintes données.
Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Un grand nombre de binômes a donné une ou plusieurs solutions, mais sans chercher à les trouver toutes. Dans des copies, les élèves démarrent la somme d’entiers consécutifs à 1. Plusieurs élèves qui ont obtenu une équation à deux inconnues correcte ont abandonné leur démarche : il était possible de la résoudre, sachant que les inconnues étaient des nombres entiers.

Exercice 2 : Dans des copies, les élèves changent les noms des points de la figure donnée dans l’énoncé. Dans d’autres, les élèves font une figure en bas de page sur laquelle ils rajoutent des points par rapport à l’énoncé. Dans d’autres encore, les élèves annoncent des nouveaux points, mais ne les placent pas sur une figure tout en les utilisant dans leurs démonstrations. Cela rend la correction des exercices de géométrie très difficile : il faudrait faire la figure sur une feuille annexe et y indiquer les nouveaux points utiles.

Exercice 3 : Beaucoup de binômes s’organisent très mal : ils donnent des exemples sans structure. On note souvent un bon démarrage (avec la valeur 120) mais pas de suite.
C’est l’exercice qui a été le plus souvent abordé avec des idées.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Le premier exercice portait sur un jardin à bêcher par trois personnes qui travaillaient seules ou à trois à des vitesses différentes. Dans le deuxième exercice, il s'agissait de trouver la longueur du côté d'un losange. Le troisième exercice portait sur le nombre de façons de colorier un drapeau constitué de trois rangées de quatre carrés : on pouvait utiliser au plus quatre couleurs, de façon que deux carrés adjacents n'aient pas la même couleur.
Les deux premiers exercices ont été résolu correctement dans des copies, ce n'est pas le cas du troisième exercice.

Exercice 1 : C'est l'exercice qui a été le plus abordé. Beaucoup d'élèves trouvent une solution et s'en satisfont, alors que le problème en comportait quatre. Plusieurs binômes définissent mal les inconnues, ou ne les définissent pas du tout. Il y a parfois des calculs qui n'ont pas de sens sur les vitesses de bêchage. La plupart des élèves qui trouvent les quatre solutions le font de manière non exhaustive.

Exercice 2 : Les solutions données sont variées. Certains binômes obtiennent (après transformations judicieuses) une équation de degré 4 qu'il arrivent à résoudre pour trouver la solution exacte du problème. D'autres utilisent le tableau de valeurs de la calculatrice pour trouver une valeur approchée de la solution d'une équation comportant des racines carrés ou des lignes trigonométriques.

Exercice 3 : Aucun binôme n'a réussi à traiter cet exercice. Il y avait très peu de pistes intéressantes dans les copies des candidats qui ont rédigé des éléments.

Copies des Premières

GAUZÈS Florian et KLAI Ilyes
Lycée Vauban, Luxembourg
Exercice n°1

Soit n impair, la somme peut s'écrire sous la forme :
$(a-x)+\dots+(a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)+\dots+(a+x)=2022$
$\Leftrightarrow a(2x+1)=2022 \Leftrightarrow a\times n=2022$ a étant l'entier central de la somme

Or $2x+1$ est impair et est un diviseur de 2022, $2x+1$ est égal à 1, 3, 337 ou 1011, on exclut 1 car ce n'est plus une somme s'il n'y a qu'un entier.

Soit n pair, la somme peut s'écrire sous la forme :
$(a-x)+\dots+(a-2,5)+(a-1,5)+(a-0,5)+(a+0,5)+(a+1,5)+(a+2,5)+\dots+(a+x)$

2a

2a

2a

a étant la moyenne des deux entiers consécutifs centraux de la somme

Avec x un nombre à virgule avec 5 comme unique décimale
la somme équivaut à : $2a(x+0,5)=2022 \Leftrightarrow 2a(2x+1)=4044$

$n=2x+1$; $2a$ et $2x$ sont des nombres entiers impairs

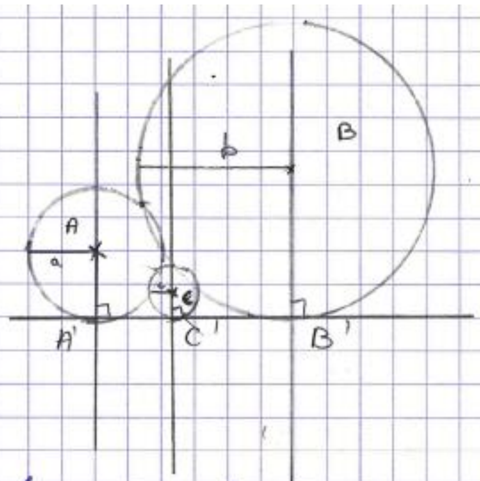
En effet, un nombre qui a pour décimale 5 doublé donne un nombre impair.

n peut donc prendre la valeur des diviseurs pairs de 2022 multipliés par 2, n est égal à 4044 (2022×2), 1348 (674×2), 12 (6×2) ou 4 (2×2)

Toutes les valeurs de n possibles sont donc : 3 ; 4 ; 12 ; 337 ; 1011 ; 1348 et 4044

MEYER Nicolas et RUAULT Edgar
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°2

Ex. 2 :



Comme les cercles sont tangents :

$AC = a + c$ $BC = b + c$ $AB = a + b$

On pose A', B' et C' les points d'intersection entre la tangente aux trois cercles horizontale et les droites la coupant perpendiculairement passant respectivement par les points A, B et C.

Avec la perpendiculaire à (CC') passant par C et coupant (AA') en I_{AC}, on peut tracer le triangle rectangle en I_{AC} : ACI_{AC}

$I_{AC}C = A'C'$ et $I_{AC}A = a - c$

D'après Pythagore :

$$(a-c)^2 + A'C'^2 = (a+c)^2$$

$$(a+c)^2 - (a-c)^2 = A'C'^2$$

$$(a+c-(a-c))(a+c+a-c) = A'C'^2$$

$$2c \times 2a = A'C'^2$$

$$A'C'^2 = 4ac$$

$$A'C' = 2\sqrt{ac}$$

Sur le même principe, on trouve :

$$A'B' = 2\sqrt{ab} \quad \text{et} \quad B'C' = 2\sqrt{bc}$$

Les points A', B' et C' étant alignés :

$$A'B' = A'C' + B'C'$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} = \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{c} + \sqrt{b} \times \sqrt{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} = \sqrt{c}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}}$$

CAUSSE Gaspard et DAI Charles
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°3

Pour chaque chiffre, il y a un nombre pair de ce chiffre qui n'est pas sur la diagonale (car la grille est symétrique) donc un nombre impair sur la diagonale, soit au moins 1. Il y a 5 cases sur la diagonale, donc il y a une case par chiffre (si un chiffre est sur plusieurs cases de la diagonale, il n'y a pas assez de cases pour les autres)

Quitte à renuméroter les chiffres on suppose que la diagonale est ainsi :

1				
	2			
		3		
			4	
				5

(on pourra trouver les autres solutions par "symétrie", il y a $5! = 120$ façons de renuméroter les chiffres, donc chaque solution en donnera 120)

On procède ensuite à une disjonction de cas pour placer les 1 :
On place le 1 de la 2ème ligne sur les 3 dernières colonnes forcément

Cas 1 : (les × indiquent qu'on ne peut pas placer de 1)

1	×	×	×	×		1				
×	2	1	×	×			2	1		
×	1	3	×	×	⇒		1	3		
×	×	×	4						4	1
×	×	×		5					1	5

Cas 2 :

1	×	×	×	×		1				
×	2	×	1	×			2		1	
×	×	3	×		⇒			3		1
×	1	×	4	×			1		4	
×	×		×	5				1		5

Cas 3 :

1	×	×	×	×		1				
×	2	×	×	1			2			1
×	×	3		×	⇒			3	1	
×	×		4	×				1	4	
×	1	×	×	5			1			5

Dans le cas 1, il n'y a que 2 façons de placer un 2 sur la 4ème ligne
Dans les cas 2 et 3, il n'y a que 2 façons de placer un 2 sur la 3ème ligne.

On procède à nouveau à une disjonction de cas pour placer les 2.
Les × indiquent qu'on ne peut pas placer de 2 (max 1 par ligne et colonne)

Cas 1.1 :

1	x	x	2	x		1			2	
x	2	1	x	x			2	1		
x	1	3	x		$\Rightarrow$		1	3		2
2	x	x	4	1		2			4	1
x	x		1	5				2	1	5

Cas 1.2 :

1	x	x	x			1				2
x	2	1	x	x			2	1		
x	1	3	2	x	$\Rightarrow$		1	3	2	
x	x	2	4	1				2	4	1
	x	x	1	5		2			1	5

Cas 2.1 :

1	x	2	x	x		1		2		
x	2	x	1	x			2		1	
2	x	3	x	1	$\Rightarrow$	2		3		1
x	1	x	4				1		4	2
x	x	1		5				1	2	5

Cas 2.2 :

1	x	x	x			1				2
x	2	x	1	x			2		1	
x	x	3	2	1	$\Rightarrow$			3	2	1
x	1	2	4	x			1	2	4	
	x	1	x	5		2		1		5

Cas **3.1** :

1	x	2	x	x		1		2		
x	2	x	x	1			2			1
2	x	3	1	x	⇒	2		3	1	
x	x	1	4					1	4	2
x	1	x		5			1		2	5

Cas **3.2** :

1	x	x		x		1			2	
x	2	x	x	1			2			1
x	x	3	1	2	⇒			3	1	2
	x	1	4	x		2		1	4	
x	1	2	x	5			1	2		5

Nous allons placer les 3 sur les cas 1.1 (choix forcé pour la 4ème ligne), 1.2 (choix forcé pour la 5ème ligne), 2.1 (choix forcé pour la 4ème ligne) et 3.1 (choix forcé pour la 5ème ligne), et les 4 sur les cas 2.2 (choix forcé pour la 5ème ligne) et 3.2 (choix forcé pour la 5ème ligne)

Les x indiquent que l'on ne peut pas placer de 3 (ou de 4)

Cas 1.1 :

1	x	x	2			1			2	3
x	2	1	3	x			2	1	3	
x	1	3	x	2	⇒		1	3		2
2	3	x	4	1		2	3		4	1
	x	2	1	5		3		2	1	5

Cas 1.2 :

1	x	x		2		1			3	2
x	2	1	x	3			2	1		3
x	1	3	2	x	⇒		1	3	2	
	x	2	4	1		3		2	4	1
2	3	x	1	5		2	3		1	5

Cas 2.1 :

1	x	2	3	x		1		2	3	
x	2	x	1				2		1	3
2	x	3	x	1	$\Rightarrow$	2		3		1
3	1	x	4	2		3	1		4	2
x		1	2	5			3	1	2	5

Cas 2.2 :

1	x		x	2		1		4		2
x	2	x	1	4			2		1	4
	x	3	2	1	$\Rightarrow$	4		3	2	1
x	1	2	4	x			1	2	4	
2	4	1	x	5		2	4	1		5

Cas 3.1 :

1	x	2	x	3		1		2		3
x	2	x		1			2		3	1
2	x	3	1	x	$\Rightarrow$	2		3	1	
x		1	4	2			3	1	4	2
3	1	x	2	5		3	1		2	5

Cas 3.2 :

1	x	x	2	4		1			2	4
x	2		x	1			2	4		1
x		3	1	2	$\Rightarrow$		4	3	1	2
2	x	1	4	x		2		1	4	
4	1	2	x	5		4	1	2		5

On complète maintenant avec 3 (si on a placé 4) ou 4 (si on a déjà placé 3).

(Les x indiquent qu'on ne peut pas en placer (et donc seront complétés avec des 5)

(il existe des lignes avec une seule case à compléter, que l'on peut facilement déduire)

Cas 1.1 :

1	x		2	3		1	5	4	2	3
x	2	1	3	4		5	2	1	3	4
	1	3	x	2	⇒	4	1	3	5	2
2	3	x	4	1		2	3	5	4	1
3	4	2	1	5		3	4	2	1	5

Cas 1.2 :

1		x	3	2		1	4	5	3	2
	2	1	x	3		4	2	1	5	3
x	1	3	2	4	⇒	5	1	3	2	4
3	x	2	4	1		3	5	2	4	1
2	3	4	1	5		2	3	4	1	5

Cas 2.1

1	x	2	3	4		1	5	2	3	4
x	2		1	3		5	2	4	1	3
2		3	x	1	⇒	2	4	3	5	1
3	1	x	4	2		3	1	5	4	2
4	3	1	2	5		4	3	1	2	5

Cas 2.2 :

1		4	x	2		1	3	4	5	2
	2	x	1	4		3	2	5	1	4
4	x	3	2	1	⇒	4	5	3	2	1
x	1	2	4	3		5	1	2	4	3
2	4	1	3	5		2	4	1	3	5

Cas 3.1 :

1		2	x	3		1	4	2	5	3
	2	x	3	1		4	2	5	3	1
2	x	3	1	4	⇒	2	5	3	1	4
x	3	1	4	2		5	3	1	4	2
3	1	4	2	5		3	1	4	2	5

Cas 3.2 :

1		x	2	4		1	3	5	2	4
	2	4	x	1		3	2	4	5	1
x	4	3	1	2	⇒	5	4	3	1	2
2	x	1	4	3		2	5	1	4	3
4	1	2	3	5		4	1	2	3	5

On a donc 6 grilles (on peut facilement vérifier qu'elles sont valides et distinctes 2 à 2), ce qui fait en tout $5! \times 6 = 120 \times 6 = 720$ cas

Copies des Terminales

HIRSCH Constantin et WEISSGERBER Ethan
Lycée Eugène Koeberlé, Molsheim
Exercice n°1

On commence par désigner le temps que met chacun d'entre eux à bêcher le jardin en étant seul par la première lettre de leur prénom, donc A pour Alain, B pour Bernard et C pour Claude.
On sait aussi que Alain est deux fois plus rapide que Claude, donc Claude passe le double de son temps à bêcher le jardin quand il est seul. On a donc : $2A = C$
On sait aussi que Bernard est plus rapide qu'Alain (sacré Bernard !), donc il passe moins de temps qu'Alain, soit : $B < A$.

On peut dire aussi que la vitesse d'un est égale à un sur le temps, car c'est la proportion du jardin (1) bêcher en une heure, donc

$V_A = \frac{1}{A}$ $\quad V_B = \frac{1}{B}$ $\quad V_C = \frac{1}{C}$

En 4 heures, ils ont donc bêché chaqun, la proportion suivante du champ :

$\frac{4}{A}$ pour Alain $\qquad \frac{4}{B}$ pour Bernard

et $\frac{4}{C}$ pour Claude.

donc si on additionne toutes ces proportions on obtient 1, car c'est en 4 heures qu'ils bêchent à trois un jardin, on obtient donc la relation suivante :

$$1 = \frac{4}{A} + \frac{4}{B} + \frac{4}{C}.$$

Il ne reste plus qu'à l'exploiter :

$C = 2A$, donc ; $1 = \frac{4}{A} + \frac{4}{B} + \frac{4}{2A}$

$$1 = \frac{6}{A} + \frac{4}{B}$$

$\times BA$

$$BA = 6B + 4A$$
$$BA - 4A = 6B$$
$$A(B-4) = 6B$$

or $B-4 > 0$ donc ;

$$A = \frac{6B}{B-4}$$

$B - 4 > 0$

$B > 4$

A permettant aussi de trouver C, il nous suffit de tester des B à partir de 5 jusquà que $B > A$, en sachant que A, B et C doivent verrifier $\frac{4}{A} + \frac{4}{B} + \frac{4}{C}$ et doivent être entier ;

on commence avec $B = 5$; $A = \frac{6 \times 5}{5-4} = \frac{30}{1} = 30$

$C = 2 \times A = 60$

$\frac{4}{5} + \frac{4}{60} + \frac{4}{30} = 1$, donc le trinôme $A = 30$, $C = 60$ et $B = 5$ est une des solution du problème.

$30 > 5$ donc $A > B$

pour $B = 6$;

$A = \frac{6 \times 6}{6-4} = \frac{36}{2} = 18$

$C = 2A$

$C = 18 \times 2$

$C = 36$

$\frac{4}{6} + \frac{4}{36} + \frac{4}{18} = 1$

donc le trinôme $A = 18$, $C = 36$ et $B = 6$ est une solution du problème.

$18 > 6$

$A > B$

pour $B = 7$;

$A = \frac{6 \times 7}{7-4} = \frac{42}{3} = 14$

donc le trinôme $A = 14$, $C = 28$ et $B = 7$ est une solution.

$C = 28$

$\frac{4}{7} + \frac{4}{14} + \frac{4}{28} = 1$

$14 > 7$

$A > B$

pour $B = 8$;

$A = \frac{6 \times 8}{8-4} = \frac{48}{4} = 12$

donc $A = 12$ $C = 24$ et $B = 8$ est solution

$C = 24$

$\frac{4}{12} + \frac{4}{24} + \frac{4}{8} = 1$

$12 > 8$ donc $A > B$

pour B=9 ;

$A = \frac{6 \times 9}{5} = \frac{54}{5}$ $\quad \frac{54}{5}$ n'est pas un entier, il n'y a pas de solution pour B = 9

pour B = 10 ;

$A = \frac{6 \times 10}{10-4} = \frac{60}{6} = 10$ or $10 = 10$
$B = A$

donc B n'est pas inférieur à A
donc il n'y a pas de solution pour B = 10
et on a trouvé toute celle possible,
car pour $B \geq 10$ $\quad A < B$ donc
le trinôme ne sera pas solution.

Sachant que $B > 4$:

$B < A \quad \Leftrightarrow \quad B < \frac{6B}{B-4}$

$B < A \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{6}{B-4}$

$B < A \quad \Leftrightarrow \quad B - 4 < 6$

$B < A \quad \Leftrightarrow \quad B < 10$

On trouve donc 4 solutions du trinôme (A;B;C)

1- (30 ; 5 ; 60)
2- (18 ; 6 ; 36)
3- (14 ; 7 ; 28)
4- (12 ; 8 ; 24)

Exercice n°2

OFFREDI Pierre et RIVERA Gauthier
Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- Les diagonales du losange [AC] et [DB] se coupent en leurs milieux en un point O en angle droit.

- On désigne par x les côtés du losange car les triangles ADB et DCB sont équilatéraux de côté x car ils partagent le côté [DB] en commun.

- Selon le théorème de Pythagore :

$AO^2 = AB^2 - OB^2$ or $OB = \frac{1}{2} DB$

$AO^2 = x^2 - \left(\frac{1}{2} \times x\right)^2$

$AO = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}}$

$AO = \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)}$

$AO = x\sqrt{\frac{3}{4}}$

$\boxed{AO = \frac{x\sqrt{3}}{2}}$

On sait que $AC = 2AO$ donc $\boxed{AC = x\sqrt{3}}$

- Comme $HA = 1$ et $CK = 2$:
On place un point M sur [CK] tel $MK = MC = 1$

- De plus $AM = HK$ donc d'après le théorème de Pythagore :

$AM^2 = AC^2 - MC^2$

$HK^2 = AC^2 - 1^2$

$HK^2 = (x\sqrt{3})^2 - 1$

$HK^2 = 3x^2 - 1$

$\boxed{HK = \sqrt{3x^2 - 1}}$

- On détermine maintenant HB et BK : à partir du théorème de Pythagore :

$HB^2 = AB^2 - HA^2$

$HB^2 = x^2 - 1^2$

$\boxed{HB = \sqrt{x^2 - 1}}$

$BK^2 = BC^2 - CK^2$

$BK^2 = x^2 - 2^2$

$\boxed{BK = \sqrt{x^2 - 4}}$

- Ainsi : HK = HO + OK

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-4} = \sqrt{3x^2-1}$$

On applique la fonction carré :

$$\cancel{x^2}-\cancel{1} + 2\left(\sqrt{x^2-1} \times \sqrt{x^2-4}\right) + \cancel{x^2} - 4 = \cancel{3}x^2 - \cancel{1}$$

$$2\left(\sqrt{(x^2-1)\times(x^2-4)}\right) = x^2+4$$

On applique la fonction carré

$$4(x^2-1)(x^2-4) = x^4+8x^2+16$$

$$4(x^4-4x^2-x^2+4) = x^4+8x^2+16$$

$$4x^4-20x^2+\cancel{16} = x^4+8x^2+\cancel{16}$$

$$3x^4-28x^2 = 0$$

$$x^2(3x^2-28) = 0$$

Un produit de facteurs vaut 0 si un des facteurs vaut 0 :

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ \text{ou} \\ 3x^2-28=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2-28 = 0 \end{cases}$$

On sait que $x \neq 0$ donc c'est n'est pas solution

Donc on cherche les solutions de $3x^2-28=0$

$3x^2-28=0$

$$\Delta = 0^2 - 4\times 3\times(-28) = 336$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$$

$$x_1 = \frac{0-4\sqrt{21}}{2\times 3} = \frac{-4\sqrt{21}}{6} =$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{21}}{3}$$

Une longueur ne peut pas être négative, ce n'est pas une solution

$$x_2 = \frac{0+4\sqrt{21}}{6} = \boxed{\frac{2\sqrt{21}}{3}}$$

En conclusion le losange ABCD a un côté de longueur $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ unités

Soit environ 3,055 unités

Exercice n°3

Soit $n \geq 1$, on considère un drapeau de 3 lignes à n colonnes à colorier avec 4 couleurs au plus.
On note :

- u_n le nombre de façons de colorier le drapeau
- d_n le nombre de façons de colorier le drapeau telles que la dernière colonne contienne deux couleurs
- t_n le nombre de façons de colorier le drapeau telles que la dernière colonne contienne trois couleurs

On a : $u_n = d_n + t_n$

Les quatre couleurs utilisées seront notées « 1 », « 2 », « 3 », « 4 ».

<u>1er cas : $n = 1$</u>

La colonne comporte deux couleurs : $4 \times 3 = 12$: ainsi $d_1 = 12$

1
2
1

La colonne comporte trois couleurs : $4 \times 3 \times 2 = 24$: ainsi $t_1 = 24$

1
2
3

$u_1 = 12 + 24 = 36$

<u>2ème cas : $n = 2$</u>

Si la 1ère colonne comporte 2 couleurs, il y a plusieurs façons de colorier la deuxième :

1	2		1	2		1	2		1	3		1	3		1	4		1	4
2	1		2	3		2	4		2	1		2	4		2	1		2	3
1	2		1	2		1	2		1	3		1	3		1	4		1	4

Il y a 7 façons à partir de 12 choix de la 1ère colonne qui conduisent à un drapeau de type d

1	2		1	2		1	2		1	2		1	3		1	3		1	3		1	4		1	4		1	4
2	1		2	1		2	3		2	4		2	1		2	1		2	4		2	1		2	1		2	3
1	3		1	4		1	4		1	3		1	2		1	4		1	2		1	2		1	3		1	2

Il y a 10 façons à partir de 12 choix de la 1ère colonne qui conduisent à un drapeau de type t

Si la 1ère colonne comporte 3 couleurs, il y a plusieurs façons de colorier la deuxième :

1	2		1	2		1	2		1	4		1	4
2	1		2	3		2	4		2	1		2	3
3	2		3	2		3	2		3	4		3	4

Il y a 5 façons à partir de 24 choix de la 1ère colonne qui conduisent à un drapeau de type d

1	2		1	2		1	2		1	2		1	3		1	3		1	3		1	3		1	4		1	4		1	4
2	1		2	3		2	3		2	4		2	1		2	1		2	4		2	4		2	1		2	3		2	3
3	4		3	1		3	4		3	1		3	2		3	4		3	1		3	2		3	2		3	1		3	2

Il y a 11 façons à partir de 24 choix de la 1ère colonne qui conduisent à un drapeau de type t

Ainsi :
$d_2 = 7 \times 12 + 5 \times 24 = 7 \times d_1 + 5 \times t_1 = 204$
$t_2 = 10 \times 12 + 11 \times 24 = 10 \times d_1 + 11 \times t_1 = 384$
$u_2 = 204 + 384 = 588$

3ème cas : $n = 3$
Le coloriage de la 3ème colonne ne dépend que du coloriage de la deuxième colonne, en réutilisant ce qui a été fait précédemment, il vient :
$d_3 = 7 \times d_2 + 5 \times t_2 = 3348$
$t_3 = 10 \times d_2 + 11 \times t_2 = 6264$
$u_3 = 204 + 384 = 9612$

De façon générale :
$d_n = 7 \times d_{n-1} + 5 \times t_{n-1}$
$t_n = 10 \times d_{n-1} + 11 \times t_{n-1}$

Ainsi :
$d_4 = 54\,756$
$t_4 = 102\,384$
$u_4 = \boxed{157\,140}$

On peut ainsi colorer $157\,140$ drapeaux.

Il y a $152\,664$ drapeaux qui comportent les quatre couleurs (la démonstration est laissée au plaisir du lecteur).