

www.freemaths.fr

COMPOSITION MATHÉMATIQUES CONCOURS GÉNÉRAL

CORRECTION, Session 2022



Concours Général Maths 2022 : Correction

Auteur du document : Gilbert JULIA, professeur agrégé honoraire

Ancien préparateur au concours du CAPES de Mathématiques

Problème 1 : En pleine effervescence

Partie I : Mise en jambes

1. $E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 2 = E\left(\frac{9}{4}\right) + 2 = 4$ est bien le carré d'un nombre entier.

En revanche, $E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right) + 2 = E\left(\frac{81}{16}\right) + 2 = 7$ n'est pas le carré d'un entier.

Il existe un entier n , en l'occurrence l'entier 2, tel que $E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^n}\right) + 2$ n'est pas le carré d'un nombre entier :

Le nombre $\frac{3}{2}$ n'est pas pétillant.

2. Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1[$. Son carré appartient aussi à l'intervalle $[0 ; 1[$ et la partie entière de son carré est égale à 0. Pour un tel nombre réel, $E(x^2) + 2 = 2$, nombre qui n'est pas le carré d'un nombre entier.

Il existe un entier n , en l'occurrence l'entier 1, tel que $E(x^{2^n}) + 2$ n'est pas le carré d'un nombre entier : x n'est pas pétillant.

Aucun nombre appartenant à l'intervalle $[0 ; 1[$ n'est pétillant.

Remarquons au passage que 1 n'est pas pétillant non plus car $E(1^{2^n}) + 2 = 3$ qui n'est pas un carré.

3.a. Soit x un nombre réel pétillant.

Pour tout entier $n \geq 2$, le nombre $E(x^{2^n}) + 2$ est par hypothèse le carré d'un nombre entier. Or, pour tout entier $n \geq 2$, $x^{2^n} = (x^2)^{2^{n-1}}$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$, le nombre $n - 1$ est un entier supérieur ou égal à 1 et le nombre $E\left((x^2)^{2^{n-1}}\right) + 2$ est le carré d'un nombre entier, ce qui montre que x^2 est pétillant.

Si x est pétillant, alors le carré de x est lui aussi pétillant.

3.b. Par récurrence évidente, le **3.a** montre que si x est pétillant, alors pour tout entier positif k le nombre x^{2^k} est lui aussi pétillant.

Or, s'il existe un réel pétillant, ce réel est nécessairement plus grand que 1 et la suite (x^{2^k}) est une suite strictement croissante : tous ses termes sont distincts et ils sont tous pétillants.

S'il existe un nombre réel pétillant, il y en a une infinité.

4. De façon générale, remarquons que, si un entier est pair (de la forme $2m$), alors son carré, qui est égal à $4m^2$, est un entier multiple de 4 et si un entier est impair (de la forme $2m + 1$), alors son carré, qui est égal à $4m^2 + 4m + 1$, est un entier multiple de 4 augmenté de 1. Autrement dit, le reste de la division euclidienne par 4 d'un carré est égal ou bien à 0 ou bien à 1.

Soit maintenant x un nombre entier positif.

- Si x est un entier pair, le nombre $E(x^2) + 2$ est un multiple de 4 augmenté de 2 : ce n'est pas le carré d'un nombre entier.
- Si x est un entier impair, Le nombre $E(x^2) + 2$ est un multiple de 4 augmenté de 3 : ce n'est pas non plus le carré d'un nombre entier.

Quelle que soit la parité de l'entier x , il existe un entier n , en l'occurrence l'entier 1, tel que $E(x^{2^n}) + 2$ n'est pas le carré d'un nombre entier :

Aucun nombre entier n est pétillant.

Partie II : Existence

5. En préalable, notons que la fonction $x \mapsto f(x) = (x-1)^2$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[3; +\infty[$. L'image par f de cet intervalle est l'intervalle $[4; +\infty[$ qui est inclus dans $[3; +\infty[$. Ainsi, l'intervalle $[3; +\infty[$ est « stable » par f , il contient les images par f de tous ses éléments.

L'entier $k \geq 1$ étant fixé, considérons maintenant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ qui lui est associée. Montrons par récurrence que tous ses termes appartiennent à $[3; +\infty[$.

- *Initialisation* : Son premier terme $u_1 = (k+1)^2$ est au moins égal à 4, donc $u_1 \in [3; +\infty[$.
- *Hérédité* : La stabilité par la fonction f de l'intervalle $[3; +\infty[$ assure que, pour tout entier n : $u_n \in [3; +\infty[\Rightarrow f(u_n) = u_{n+1} \in [3; +\infty[$, l'appartenance à $[3; +\infty[$ est héréditaire.

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq 3$

6. Partons du principe que toute fonction puissance d'exposant entier strictement positif définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est continue et strictement croissante sur cet intervalle. De plus, une telle fonction laisse invariant le nombre 1 et a pour limite plus l'infini en plus l'infini. De ce fait, la restriction d'une telle fonction à l'intervalle $[1; +\infty[$ est une bijection de cet intervalle sur lui-même. En particulier, pour tout entier n strictement positif fixé, il en est ainsi de la fonction puissance 2^n .

Or, puisque nous avons vérifié que pour tout entier n , $u_n \geq 3$, on sait que : $u_n - 1 > u_n - 2 \geq 1$.

Chacun des deux nombres $(u_n - 1)$ et $(u_n - 2)$ appartient à l'intervalle $[1; +\infty[$, ils en sont l'un et l'autre des valeurs intermédiaires. Chacun d'eux a dans l'intervalle $[1; +\infty[$ un antécédent et un seul par la fonction puissance 2^n .

- **Il existe un réel unique $a_n \in [1; +\infty[$ tel que $(a_n)^{2^n} = u_n - 2$**
- **Il existe un réel unique $b_n \in [1; +\infty[$ tel que : $(b_n)^{2^n} = u_n - 1$**

En outre, remarquons que ces deux réels sont rangés dans le même ordre que leurs images par la fonction puissance 2^n : $b_n > a_n \geq 1$

7. Essayons d'exploiter des relations de récurrence entre deux termes consécutifs des suites (a_n) et (b_n) . Plus précisément, un entier n strictement positif étant donné, nous allons essayer d'explicitier l'écart entre les puissances $(2^{n+1})^{\text{èmes}}$ des termes de rang n et de rang $(n+1)$.

$$\text{D'une part : } \begin{cases} u_{n+1} = (a_{n+1})^{2^{n+1}} + 2 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 = ((a_n)^{2^n} + 1)^2 = (a_n)^{2^{n+1}} + 2(a_n)^{2^n} + 1 \end{cases}$$

D'où on extrait la relation : $(a_{n+1})^{2^{n+1}} - (a_n)^{2^{n+1}} = 2(a_n)^{2^n} - 1$

Le fait que $a_n \geq 1$ implique que $2(a_n)^{2^n} - 1 \geq 1$: l'écart $(a_{n+1})^{2^{n+1}} - (a_n)^{2^{n+1}}$ est strictement positif, c'est-à-dire que $(a_{n+1})^{2^{n+1}} > (a_n)^{2^{n+1}}$

$$\text{D'autre part : } \begin{cases} u_{n+1} = (b_{n+1})^{2^{n+1}} + 1 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 = ((b_n)^{2^n})^2 = (b_n)^{2^{n+1}} \end{cases}$$

D'où on extrait la relation : $(b_{n+1})^{2^{n+1}} - (b_n)^{2^{n+1}} = -1$: l'écart $(b_{n+1})^{2^{n+1}} - (b_n)^{2^{n+1}}$ est strictement négatif, c'est-à-dire que $(b_{n+1})^{2^{n+1}} < (b_n)^{2^{n+1}}$

Du fait de la stricte croissance sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ de la fonction puissance $(2^{n+1})^{\text{ème}}$, les nombres a_n et a_{n+1} , et de même les nombres b_n et b_{n+1} , sont rangés dans le même ordre que leurs puissances $(2^{n+1})^{\text{èmes}}$. Ainsi, quel que soit n strictement positif : $a_{n+1} > a_n$ et $b_{n+1} < b_n$

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

8. Les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont toutes deux strictement monotones. La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est majorée par n'importe quel terme de la suite (b_n) , par exemple par $b_1 = \sqrt{k^2 + 2k}$, et la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est minorée par n'importe quel terme de la suite (a_n) , par exemple par $a_1 = \sqrt{k^2 + 2k - 1}$.

L'une étant croissante et majorée, l'autre étant décroissante et minorée :

Les deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont des suites convergentes.

9. Outre la monotonie de ces deux suites, nous avons vérifié que $b_n > a_n$ pour tout entier n .

Leurs limites respectives α et β vérifient les inégalités : $a_1 = \sqrt{k^2 + 2k - 1} < \alpha \leq \beta < b_1 = \sqrt{k^2 + 2k}$.

Or, pour tout entier strictement positif k : $k^2 + 2k - 1 > k^2$, donc $a_1 > k$, et $k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, donc $b_1 < k + 1$.

La limite α de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifie la double inégalité : $k < \alpha < k + 1$.

En fait, on dispose de la triple inégalité : $k < \alpha \leq \beta < k + 1$

Montrons maintenant la « pétillance » de α .

Notons que, par construction, tous les termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ sont des entiers carrés parfaits.

Par définition des termes des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$, pour tout entier $n \geq 1$: $(a_n)^{2^n} + 2 = u_n$ et $(b_n)^{2^n} + 2 = u_n + 1$, il s'agit là de deux entiers consécutifs dont le premier est un carré.

Pour tout entier $n \geq 1$: $(a_n)^{2^n} + 2 < \alpha^{(2^n)} + 2 < (b_n)^{2^n} + 2 = u_n + 1$.

Le nombre $\alpha^{(2^n)} + 2$ est situé strictement entre les deux entiers consécutifs u_n et $u_n + 1$, par conséquent sa partie entière n'est autre que le nombre u_n qui est un carré.

Pour tout entier $n \geq 1$, $E(\alpha^{(2^n)} + 2)$ est le carré d'un entier, le nombre α est pétillant.

Partie III : Unicité

10. En préalable à cette question, remarquons que, si on considère les carrés de deux entiers strictement positifs consécutifs m et $m + 1$, la différence de ces carrés est : $(m + 1)^2 - m^2 = 2m + 1$, elle est supérieure ou égale à 3.

Soit k un entier strictement positif et γ un nombre réel pétillant tel que $k \leq \gamma < k + 1$.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = v_n$.

Initialisation : En ce qui concerne le rang 1, exploitons le fait que les carrés des nombres k ; γ ; $k + 1$ sont rangés dans le même ordre qu'eux : $k^2 \leq \gamma^2 < (k + 1)^2$. Par conséquent : $k^2 + 2 \leq v_1 = E(\gamma^2) + 2 < (k + 1)^2 + 2$.

Or, en vertu de la remarque préalable à cette question, le seul nombre qui soit un carré parfait et qui est entre $k^2 + 2$ et $(k + 1)^2 + 2$ est le carré $(k + 1)^2$.

Nécessairement : $v_1 = (k + 1)^2 = u_1$

Hérédité : Supposons établi que pour un certain entier $n \geq 1$: $u_n = v_n = E(\gamma^{2^n}) + 2$,

Selon cette hypothèse : $u_n - 2 \leq \gamma^{2^n} < u_n - 1$. En élevant au carré : $(u_n - 2)^2 \leq \gamma^{(2^{n+1})} < (u_n - 1)^2$.

On dispose donc de l'inégalité : $(u_n - 2)^2 + 2 \leq \gamma^{(2^{n+1})} + 2 < (u_n - 1)^2 + 2$

En vertu de la remarque préalable à cette question, le seul nombre qui soit un carré parfait et qui est situé entre $(u_n - 2)^2 + 2$ et $(u_n - 1)^2 + 2$ est le carré $(u_n - 1)^2$. Nécessairement : $v_{n+1} = (u_n - 1)^2 = u_{n+1}$

Si à un rang n , $u_n = v_n$, alors au rang suivant $u_{n+1} = v_{n+1}$, cette égalité est héréditaire.

L'égalité est établie pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = E(\gamma^{(2^n)}) + 2$

11. Vu ce dernier résultat : $u_n - 2 \leq \gamma^{(2^n)} \leq u_n - 1$, c'est-à-dire que, compte tenu des définitions des nombres a_n et b_n : $(a_n)^{2^n} \leq \gamma^{(2^n)} \leq (b_n)^{2^n}$. Les antécédents de ces trois nombres par la fonction puissance 2^n sont classés dans le même ordre :

$$\text{Pour tout entier } n \geq 1 : a_n \leq \gamma \leq b_n.$$

12.a. Soit x et y tels que $x \geq y \geq 1$; la différence $(x - y)$ est donc un réel positif.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $x^{(2^n)} - y^{(2^n)} \geq 2^n (x - y)$

Initialisation : En ce qui concerne le rang 1 : $x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$. Or, puisque $x \geq y \geq 1$, la somme $(x + y)$ est supérieure ou égale à 2 : $x^2 - y^2 \geq 2(x - y)$, l'inégalité est bien vérifiée lorsque $n = 1$.

Hérédité : Supposons établi que, pour un certain entier $n \geq 1$, $x^{(2^n)} - y^{(2^n)} \geq 2^n (x - y)$.

Au rang suivant : $x^{(2^{n+1})} - y^{(2^{n+1})} = (x^{(2^n)})^2 - (y^{(2^n)})^2 = (x^{(2^n)} + y^{(2^n)}) \times (x^{(2^n)} - y^{(2^n)})$

Mais si $x \geq y \geq 1$, leurs puissances 2^n èmes vérifient des mêmes inégalités de même sens : $x^{(2^n)} + y^{(2^n)} \geq 2$ et, par suite : $x^{(2^{n+1})} - y^{(2^{n+1})} \geq 2 \times 2^n (x - y) = 2^{n+1} (x - y)$

Si $x^{(2^n)} - y^{(2^n)} \geq 2^n (x - y)$, alors $x^{(2^{n+1})} - y^{(2^{n+1})} \geq 2^{n+1} (x - y)$, l'inégalité est héréditaire.

L'inégalité $x^{(2^n)} - y^{(2^n)} \geq 2^n (x - y)$ est démontrée pour tout entier $n \geq 1$.

12.b. Compte tenu de l'inégalité $a_n \leq \gamma < b_n$ obtenue pour tout entier $n \geq 1$, en passant à la limite : $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Supposons que l'inégalité stricte $\alpha < \beta$ soit vérifiée. La différence $\beta - \alpha$ est selon cette hypothèse supposée être un réel strictement positif.

Dans ce cas, pour tout entier $n \geq 1$: $(b_n)^{2^n} > \beta^{2^n} > \alpha^{2^n} > (a_n)^{2^n}$. Nous en déduisons que : $(b_n)^{2^n} - (a_n)^{2^n} > \beta^{2^n} - \alpha^{2^n} \geq 2^n (\beta - \alpha)$. Pour les entiers n suffisamment grands (ceux qui sont tels que $2^n > \frac{1}{\beta - \alpha}$), nous aurions l'inégalité stricte : $(b_n)^{2^n} - (a_n)^{2^n} > 1$, ce qui serait en contradiction avec le fait

que, par leur définition, $(a_n)^{2^n}$ et $(b_n)^{2^n}$ sont deux entiers consécutifs. L'hypothèse est à rejeter.

Nécessairement : $\alpha = \gamma = \beta$, les suites $(a_n)^{2^n}$ et $(b_n)^{2^n}$ convergent vers γ .

13. La question 12 caractérise un nombre pétillant de l'intervalle $[k ; k + 1[$ comme étant par nécessité la limite commune des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. Par unicité de la limite d'une suite, cette propriété caractérise bien un unique nombre.

Illustration : valeurs approchées de nombres pétillants

Le programme « **bulle** », rédigé sur TI-Nspire, calcule, pour une valeur k fixée, les termes successifs des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. Il est arrêté lorsque le logiciel n'arrive plus à distinguer la différence entre le terme a_n et le terme b_n , chose qui se produit assez rapidement.

Ce programme permet d'obtenir une valeur approchée du nombre pétillant situé entre k et $k + 1$.

Ainsi par exemple, 1,678459 et 2,817224 sont des valeurs approchées à 10^{-6} près des nombres pétillants situés entre 1 et 2 puis entre 2 et 3.

The image shows a TI-Nspire calculator interface. On the left, the execution of the program 'bulle' is shown for two values of k. For k=1, the program outputs a list of pairs of terms (a_n, b_n) for n from 1 to 6, with the last two terms being 1.67845896513. For k=2, it outputs pairs for n from 1 to 5, with the last two terms being 2.81722449761. The word 'Terminé' (Finished) is displayed at the end of each execution. On the right, the source code of the program 'bulle' is visible. It defines a function bulle(k) that uses a while loop to generate terms a_n and b_n until they are indistinguishable. The code includes: Define bulle(k)=, Prgm, Local u,a,b,n, Define u=(k+1)^2, Define a=sqrt(u-2), Define b=sqrt(u-1), Define n=0, While a≠b, n+1 → n, 2^n * sqrt(u-2) → a, 2^n * sqrt(u-1) → b, (u-1)^2 → u, Disp {a,b}, EndWhile, EndPrgm.

Problème 2 : Garder le cap

Partie I : Etude des petites valeurs de n

1. Quelles que soient les circonstances, les deux points distincts M_0 et M_1 sont des points alignés.
2. S'il existe une valeur de k telle que : $\overrightarrow{M_k M_{k+1}} = \overrightarrow{M_{k+1} M_{k+2}}$, les points M_k, M_{k+1}, M_{k+2} sont des points alignés, le point M_{k+1} étant le milieu de $[M_k M_{k+2}]$. C'est le cas si deux vecteurs consécutifs sont égaux tous deux ou bien à \vec{i} ou bien à \vec{j}

Considérons les cinq premiers points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 de la suite $(M_k)_{k \geq 0}$. Ou bien la circonstance précédente se produit pour $k = 0, 1$ ou 2 et dans ce cas trois consécutifs des cinq points sont alignés, ou bien deux vecteurs consécutifs sont égaux l'un à \vec{i} l'autre à \vec{j} et dans ce cas $\overrightarrow{M_0 M_2} = \overrightarrow{M_2 M_4} = \vec{i} + \vec{j}$, les points M_0, M_2 et M_4 sont des points alignés, M_2 étant milieu de $[M_0 M_4]$.

Quelles que soient les circonstances, trois des cinq premiers points de la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ sont des points alignés.

Partie II : Préliminaires

3. Procédons par récurrence pour construire la suite $(u_k)_{k \geq 0}$.

Initialisation : Au rang 0 : $\overrightarrow{M_0 M_0} = u_0 \vec{i} + (0 - u_0) \vec{j}$ avec : $u_0 = 0$

Hérédité : Supposons qu'il existe un rang $k \geq 0$ tels que : $\overrightarrow{M_0 M_k} = u_k \vec{i} + (k - u_k) \vec{j}$ avec $0 \leq u_k \leq k$ (les composantes sont deux entiers positifs et de somme k). Alors au rang suivant $(k+1)$:

$$\overrightarrow{M_0 M_{k+1}} = \overrightarrow{M_0 M_k} + \overrightarrow{M_k M_{k+1}} = (u_k \vec{i} + (k - u_k) \vec{j}) + \overrightarrow{M_k M_{k+1}}$$

Deux cas se présentent :

- Si $\overrightarrow{M_k M_{k+1}} = \vec{i}$, $\overrightarrow{M_0 M_{k+1}} = (u_k + 1)\vec{i} + (k - u_k)\vec{j} = (u_k + 1)\vec{i} + ((k + 1) - (u_k + 1))\vec{j}$, auquel cas :
 $u_{k+1} = u_k + 1$
- Si $\overrightarrow{M_k M_{k+1}} = \vec{j}$, $\overrightarrow{M_0 M_{k+1}} = u_k \vec{i} + (k - u_k + 1)\vec{j} = u_k \vec{i} + ((k + 1) - u_k)\vec{j}$, auquel cas : $u_{k+1} = u_k$

Quelles que soient les circonstances, au rang suivant les deux composantes sont des entiers positifs et de

somme $(k + 1)$. Précisément : $\begin{cases} u_{k+1} = u_k \\ \text{ou bien} \\ u_{k+1} = u_k + 1 \end{cases}$, ce qui définit les relations de récurrence en jeu.

Il existe une suite $(u_k)_{k \geq 1}$ de nombres entiers positifs telle que :

Pour tout entier naturel k : $\overrightarrow{M_0 M_k} = u_k \vec{i} + (k - u_k)\vec{j}$ avec $u_{k+1} = u_k$ ou $u_{k+1} = 1 + u_k$

(Les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_0 M_k}$ sont ainsi deux entiers positifs de somme k)

4. Supposons que l'on dispose de deux nombres réels s et t pour lesquels il existe n entiers k tels que $u_k = ks + t$.

Pour un tel entier k : $\overrightarrow{M_0 M_k} = (ks + t)\vec{i} + (k - (ks + t))\vec{j} = k(s\vec{i} + (1 - s)\vec{j}) + t(\vec{i} + \vec{j})$.

Notons k_1, k_2, \dots, k_n ces entiers.

- D'une part : $\overrightarrow{M_0 M_{k_i}} = k_i(s\vec{i} + (1 - s)\vec{j}) + t(\vec{i} + \vec{j})$
- D'autre part, pour tout indice i tel que $1 \leq i \leq n$: $\overrightarrow{M_0 M_{k_i}} = k_i(s\vec{i} + (1 - s)\vec{j}) + t(\vec{i} + \vec{j})$

On en déduit : $\overrightarrow{M_{k_1} M_{k_i}} = (k_i - k_1)(s\vec{i} + (1 - s)\vec{j})$ pour tout indice i tel que $1 \leq i \leq n$

Les n points d'indices k_1, k_2, \dots, k_n sont tous alignés sur la droite passant par le point d'indice k_1 et de

vecteur directeur le vecteur : $(s\vec{i} + (1 - s)\vec{j})$

L'existence de deux réels s et t tels que $u_k = ks + t$ pour n valeurs différentes de l'entier k assure l'alignement d'au moins n points parmi ceux de la suite $(M_k)_{k \geq 0}$

5. Vu la construction par récurrence des termes de la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ de la **question 3**, pour tout entier k strictement positif : $u_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour chaque indice i tel que $1 \leq i \leq k$.

Le terme u_k est une somme de k nombres entiers égaux à 0 ou bien à 1 , cette somme est donc comprise entre 0 et k , comme nous l'avons d'ailleurs remarqué dans le courant la **question 3** (« composantes entiers positifs et de somme k »).

De l'inégalité $0 \leq u_k \leq k$, on déduit que $0 \leq \frac{u_k}{k} \leq 1$

Pour tout entier k strictement positif, v_k est un nombre compris entre 0 et 1 .

6. Théorème des tiroirs.

Procédons par contraposition.

Soit k et ℓ deux entiers naturels non nuls. Supposons que tous les k tiroirs contiennent chacun au plus $(\ell - 1)$ chemises. Alors le nombre de chemises contenues dans l'ensemble des tiroirs est inférieur ou égal à $k \times (\ell - 1)$, nombre qui, puisque ℓ et k sont des entiers naturels non nuls, est lui-même inférieur ou égal au nombre $k\ell - 1$: Si tous les k tiroirs contiennent chacun au plus $(\ell - 1)$ chemises, alors il y a au plus $k\ell - 1$ chemises dans l'ensemble des tiroirs.

Par contraposition, s'il y a au moins $k\ell$ chemises dans l'ensemble des tiroirs, au moins l'un des tiroirs contient au moins ℓ chemises.

Partie III : Barrières rationnelles

7. Soit k un éventuel entier tel que $\frac{a}{b}$ soit situé entre v_k et v_{k+1} .

Nous avons vu que $v_k = \frac{u_k}{k}$. Deux cas se présentent suivant la valeur de u_{k+1} :

* **Premier cas** : $u_{k+1} = u_k$.

Alors, $v_{k+1} - v_k = \frac{u_k}{k+1} - \frac{u_k}{k} = -\frac{u_k}{k(k+1)} \leq 0$. Dans ce cas : $v_{k+1} \leq \frac{a}{b} \leq v_k$

Les nombres entiers a et b sont présumés tels que $\frac{u_k}{k+1} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{u_k}{k}$ soit tels que $\begin{cases} bu_k \leq ka + a \\ ka \leq bu_k \end{cases}$, c'est-à-dire

tels que : $0 \leq bu_k - ka \leq a$.

Dans ce premier cas, $bu_k - ka$ est positif et inférieur ou égal à a .

* **Deuxième cas** : $u_{k+1} = u_k + 1$

Alors : $v_{k+1} - v_k = \frac{u_k + 1}{k+1} - \frac{u_k}{k} = \frac{k - u_k}{k(k+1)} \geq 0$. Dans ce cas : $v_{k+1} \geq \frac{a}{b} \geq v_k$

Les nombres entiers a et b sont présumés tels que $\frac{u_k}{k} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{u_k + 1}{k+1}$ soit tels que $\begin{cases} bu_k \leq ka \\ ka + a \leq bu_k + b \end{cases}$, c'est-à-

dire tels que : $a - b \leq bu_k - ka \leq 0$.

Dans ce deuxième cas, $bu_k - ka$ est négatif et supérieur ou égal à $a - b$.

Quel que soit son signe, $bu_k - ka$ est entre le nombre négatif $a - b$ et le nombre positif a .

Quelles que soient les circonstances : $a - b \leq bu_k - ka \leq a$

8. Supposons qu'il existe au moins $(b+1)n$ entiers k tels que $\frac{a}{b}$ soit situé entre v_k et v_{k+1} .

D'après la question précédente, ces entiers vérifient tous la double inégalité : $a-b \leq bu_k - ka \leq a$.

Or, entre l'entier $a-b$ et l'entier a , il y a exactement, au sens large, $(b+1)$ entiers, à savoir les entiers : $a-b, (a-b)+1, (a-b)+2, \dots, (a-b)+b = a$.

Répartissons les $(b+1)n$ entiers k en $(b+1)$ « tiroirs » :

- Ceux pour lesquels $bu_k - ka = a - b$ exactement.
- Ceux pour lesquels $bu_k - ka = a - b + 1$ exactement.
- ...
- Ceux pour lesquels $bu_k - ka = (a-b) + a = a$ exactement.

D'après le théorème des tiroirs, l'un au moins de ces « tiroirs » contient au moins n entiers.

Il existe donc au moins un entier c appartenant à l'ensemble $\{0, 1, \dots, b\}$ tel qu'il y a au moins n entiers k vérifiant l'égalité : $bu_k - ka = a - b + c$.

Cette égalité s'écrit aussi bien : $u_k = k \frac{a}{b} + \frac{a-b+c}{b}$.

Si nous posons : $s = \frac{a}{b}$; $t = \frac{a-b+c}{b}$, nous pouvons proposer deux nombres réels s et t pour lesquels il existe au moins n entiers k vérifiant la relation $u_k = sk + t$.

D'après la question 4, la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ contient au moins n points alignés.

Un critère d'alignement de n points parmi ceux de la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ est qu'il existe une fraction de dénominateur b encadrée par au moins $(b+1)n$ paires de termes $\{v_k ; v_{k+1}\}$, c'est-à-dire des paires de termes consécutifs de la suite $(v_k)_{k \geq 0}$.

Partie IV : Couples serrés, moyennes naïves et recouvrements par des intervalles principaux

9. Pour le couple de fractions $\left(\frac{0}{1}; \frac{1}{1}\right)$, $a = 0$; $b = c = d = 1$, la vérification est immédiate.

10. Soit $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ un couple de fractions serré.

10.a. Alors : $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$. Par hypothèse, b et d sont des entiers strictement positifs et $bc - ad = 1$. En

conséquence : $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = -\frac{1}{bd}$. La différence entre ces deux fractions est strictement négative, donc $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

10.b. La moyenne naïve des deux fractions $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ est la fraction : $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$.

On note, par un simple « jeu d'écriture », que les deux nombres entiers $(a+c)$; $(b+d)$ vérifient les relations suivantes : $b \times (a+c) - a \times (b+d) = c \times (b+d) - d \times (a+c) = bc - ad$

Le couple $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ étant supposé serré, $bc - ad = 1$.

Ces relations s'écrivent aussi bien : $b \times (a+c) - a \times (b+d) = c \times (b+d) - d \times (a+c) = 1$

On en déduit d'une part que la relation de Bézout est vérifiée pour les deux nombres entiers $(a+c)$; $(b+d)$:

Ces nombres sont premiers entre eux et la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est bien irréductible.

On en déduit d'autre part que les couples $\left(\frac{a}{b}; \frac{a+c}{b+d}\right)$ et $\left(\frac{a+c}{b+d}; \frac{c}{d}\right)$ sont des couples serrés.

En résumé la moyenne naïve d'un couple de fractions serré est une fraction irréductible qui s'intercale strictement entre elles en les serrant l'une et l'autre.

11. Supposons que $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right)$ et $\left(\frac{c}{d}; \frac{e}{f}\right)$ soient deux couples de fractions irréductibles serrées. Par hypothèse, $bc - ad = de - cf = 1$.

La **question 10.a** a montré que s'il en est ainsi, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ et $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, la fraction $\frac{c}{d}$ est intercalée entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{e}{f}$. Plus précisément : $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$ et $\frac{c}{d} - \frac{e}{f} = -\frac{1}{df}$

Or, si la relation $d \geq 2n$ est vérifiée, les relations : $0 < \frac{1}{bd} \leq \frac{1}{2bn}$ et $0 < \frac{1}{df} \leq \frac{1}{2fn}$ le sont aussi.

On en conclut d'une part que : $0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \leq \frac{1}{2bn}$, autrement dit que :

$\frac{c}{d}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{a}{b}; \frac{a}{b} + \frac{1}{2bn}\right]$ donc à l'intervalle principal supérieur de la fraction $\frac{a}{b}$.

On en conclut d'autre part que : $-\frac{1}{2fn} \leq \frac{c}{d} - \frac{e}{f} < 0$, autrement dit que :

$\frac{c}{d}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{e}{f} - \frac{1}{2fn}; \frac{e}{f}\right]$ donc à l'intervalle principal inférieur de la fraction $\frac{e}{f}$.

12. Nous avons vu en **question 1** que le couple initial $\left(\frac{0}{1}; \frac{1}{1}\right)$ était un couple serré et en **question 10.b** que la moyenne naïve d'un couple de fractions serrées s'intercale strictement entre les deux fractions en les serrant l'une et l'autre. À chaque étape, le processus décrit ne génère donc que des listes de fractions irréductibles qui serrent leurs deux voisines et dont le dénominateur est strictement inférieur à $2n$. Or, il n'y a qu'un nombre fini de fractions disponibles, c'est-à-dire de fractions irréductibles $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ dont le dénominateur est strictement inférieur à $2n$. Ce nombre de fractions est en effet au plus égal au nombre de couples de nombres entiers $(a; b)$ vérifiant : $\begin{cases} 1 \leq b \leq 2n-1 \\ 0 \leq a \leq b \end{cases}$, c'est-à-dire, vu que a prend au plus $b+1$ valeurs pour b fixé, à la somme $2+3+4+\dots+2n$, somme de termes d'une suite arithmétique qui vaut : $2n^2 + n - 1$ (le lecteur pourra le vérifier).

On remarque que pour $n \geq 1$: $4n^2 - (2n^2 + n - 1) = 2n^2 + n - 1 = (n+1)(2n-1) \geq 0$: le nombre de fractions disponibles est inférieur ou égal à $4n^2$. Le processus ne peut générer davantage de fractions.

Nécessairement, le processus s'arrête et la liste obtenue contient au plus $4n^2$ fractions.

13. Soit $q_k = \frac{a_k}{b_k}$; $q_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ deux fractions consécutives de la liste obtenue à l'issue du processus. Il s'agit d'un couple serré.

Leur moyenne naïve est la fraction irréductible $r_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{b_k + b_{k+1}}$. Cette fraction serait la prochaine fraction qui viendrait s'insérer dans la liste entre q_k et q_{k+1} si l'on continuait l'algorithme.

Conformément aux directives du processus : $1 \leq b_k \leq 2n-1$ et $1 \leq b_{k+1} \leq 2n-1$ car les dénominateurs de toutes les fractions générées sont au plus égaux à $2n-1$ mais en même temps la somme $b_k + b_{k+1}$ de leurs dénominateurs est au moins égale à $2n$, sinon le processus décrit aurait déjà intercalé une fraction entre les deux fractions en jeu.

Ainsi : $2n \leq b_k + b_{k+1} \leq 2 \times (2n-1) = 4n-2$ donc *a fortiori* : $2n \leq b_k + b_{k+1} \leq 4n-1$

Les dénominateurs des fractions r_k appartiennent tous à $[2n ; 4n-1]$

14. Pour chaque entier $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; \ell - 1\}$, le couple de fractions $(q_k ; q_{k+1})$ est serré et leur moyenne naïve r_k est d'après la **question 10** une fraction irréductible qui s'intercale strictement entre elles en les serrant l'une et l'autre.

Or, le dénominateur de la fraction r_k qui s'intercale entre q_k et q_{k+1} a d'après la question précédente un dénominateur au moins égal à $2n$. Cette condition étant vérifiée, d'après la **question 11**, cette fraction appartient à l'intervalle principal supérieur de q_k et à l'intervalle principal inférieur de q_{k+1} :

$$q_k < r_k \leq q_k + \frac{1}{2b_k n} \text{ et aussi : } q_{k+1} - \frac{1}{2b_{k+1} n} \leq r_k < q_{k+1}.$$

$[q_k ; r_k]$ est inclus dans l'intervalle principal supérieur de q_k et $[r_k ; q_{k+1}]$ est inclus dans l'intervalle principal inférieur de q_{k+1}

Complément : un exemple de mise en œuvre du « processus » :

Les algorithmes qui suivent ont été écrits avec TI-Nspire.

<p>La fonction mna définit la moyenne naïve de deux fractions. Le programme « etape » insère dans une liste de fractions les moyennes naïves de deux fractions consécutives à condition que leur somme des dénominateurs soit plus petite que $2n$.</p>	 <p>The image shows two screenshots from a TI-Nspire calculator. The left screenshot displays the definition of the function $mna(x,y) = \frac{\text{getNum}(x) + \text{getNum}(y)}{\text{getDenom}(x) + \text{getDenom}(y)}$ and its application to a list of fractions, resulting in a new list. The right screenshot shows the execution of the program 'etape', which iteratively inserts the mean of adjacent fractions into a list as long as the sum of their denominators is less than $2n$.</p>
<p>La recherche de la liste issue du processus décrit dans le problème peut être automatisée, c'est le rôle du programme « processus ».</p>	 <p>The image shows two screenshots from a TI-Nspire calculator. The left screenshot displays the execution of the 'processus' program, which generates a sequence of Farey fractions. The right screenshot shows the program's completion message: 'processus' enregistr. effectué.</p>

NB. Les listes ainsi générées portent le nom de « suites de Farey ». Le lecteur pourra se documenter à leur propos.

Partie V : Coincé dans un intervalle principal

15. D'après la définition des termes de la suite $(v_k)_{k \geq 1}$: $v_k = \frac{u_k}{k}$.

Si chacun des termes $v_{\ell n} ; v_{\ell n+1} ; \dots ; v_{2\ell n-1}$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{a}{b} ; \frac{a}{b} + \frac{1}{2bn} \right]$, pour tout entier k tel que

$$\ell n \leq k \leq 2\ell n - 1 : \frac{a}{b} \leq \frac{u_k}{k} \leq \frac{a}{b} + \frac{1}{2bn}$$

- D'une part : $\frac{a}{b} \leq \frac{u_k}{k}$, ce qui donne : $bu_k - ak \geq 0$
- D'autre part $\frac{u_k}{k} \leq \frac{a}{b} + \frac{1}{2bn}$ ce qui donne : $bu_k - ak \leq \frac{k}{2n}$. Or : $\frac{k}{2n} \leq \frac{2\ell n - 1}{2n} = \ell - \frac{1}{2n} < \ell$

En définitive pour tout entier k tel que $\ell n \leq k \leq 2\ell n - 1$: $0 \leq bu_k - ak < \ell$

16. Nous avons ainsi trouvé ℓn nombres u_k qui prennent l'une ou l'autre des ℓ valeurs de l'ensemble $\{0 ; 1 ; \dots ; \ell - 1\}$. D'après le théorème des tiroirs, au moins une de ces valeurs est prise au moins n fois.

Il existe au moins un nombre entier c , vérifiant $0 \leq c \leq \ell - 1$, tel que $bu_k - ak = c$, c'est-à-dire tel que

$$u_k = \frac{a}{b}k + \frac{c}{b} \text{ pour au moins } n \text{ valeurs de l'entier } k. \text{ D'après le résultat de la question 5 avec } s = \frac{a}{b} ; t = \frac{c}{b} :$$

La suite $(M_n)_{n \geq 1}$ contient au moins n points alignés.

17. On suppose maintenant que chacun des termes $v_{\ell n} ; v_{\ell n+1} ; \dots ; v_{2\ell n-1}$ appartient à l'intervalle

$$\left[\frac{a}{b} - \frac{1}{2bn} ; \frac{a}{b} \right], \text{ donc pour tout entier } k \text{ tel que } \ell n \leq k \leq 2\ell n - 1 : \frac{a}{b} - \frac{1}{2bn} \leq \frac{u_k}{k} \leq \frac{a}{b}$$

- D'une part : $\frac{a}{b} \geq \frac{u_k}{k}$, ce qui donne : $bu_k - ak \leq 0$
- D'autre part $\frac{u_k}{k} \geq \frac{a}{b} - \frac{1}{2bn}$ ce qui donne : $bu_k - ak \geq -\frac{k}{2n}$. Or : $-\frac{k}{2n} \geq -\frac{2\ell n - 1}{2n} = -\ell + \frac{1}{2n} > -\ell$

En définitive, pour tout entier k tel que $\ell n \leq k \leq 2\ell n - 1$: $0 \geq bu_k - ak > -\ell$.

Nous avons ainsi trouvé ℓn nombres u_k qui prennent l'une ou l'autre des ℓ valeurs de l'ensemble $\{-\ell + 1; -\ell + 2; \dots; -1; 0\}$. D'après le théorème des tiroirs, au moins une de ces valeurs est prise au moins n fois. Il existe au moins un nombre entier c , vérifiant $-\ell + 1 \leq c \leq 0$ tel que $bu_k - ak = c$, c'est-à-dire tel que $u_k = \frac{b}{a}k + \frac{c}{a}$ pour au moins n valeurs de l'entier k .

La suite $(M_n)_{n \geq 1}$ contient dans ce cas aussi au moins n points alignés.

Partie VI : Conclusion

18. Faisons le point :

- Nous disposons d'après la **question 12** d'une liste d'au plus $4n^2$ fractions irréductibles issues du processus: $0 = q_0 < q_1 < \dots < q_\ell = 1$, liste dont tout couple consécutif est serré. Ces fractions partagent l'intervalle $[0; 1]$ en au plus $4n^2 - 1$ intervalles $[q_k; q_{k+1}]$
- Nous avons partagé en deux morceaux chacun de ces intervalles à l'aide de la moyenne naïve r_k de leurs extrémités.
- Nous avons ainsi recouvert l'intervalle $[0; 1]$ par au plus $2 \times (4n^2 - 1) = 8n^2 - 2$ intervalles, à savoir $[q_k; r_k]$ et $[r_k; q_{k+1}]$ où $1 \leq k \leq \ell - 1 \leq 4n^2 - 1$, tous inclus dans des intervalles principaux. Notons $N = 8n^2 - 2$ ce majorant du nombre d'intervalles de recouvrement.
- Les dénominateurs de ces fractions q_k ou r_k sont, d'après la **question 13**, tous inférieurs ou égaux au nombre $4n - 1$. Notons $B = 4n - 1$ ce majorant des dénominateurs employés.

18.a. La suite $(M_k)_{k \geq 0}$ étant constituée d'une infinité de points, la suite associée $(v_k)_{k \geq 0}$ est constituée d'une infinité de termes. L'un au moins des intervalles de subdivision $[q_k ; r_k]$ ou $[r_k ; q_{k+1}]$ contient une infinité de termes. Notons I cet intervalle.

Distinguons deux cas de figure :

Premier cas : Tous les termes v_k appartiennent à I à partir d'un certain rang A .

Si nous choisissons ℓ de sorte que $\ell n \geq A$, tous les termes v_k depuis celui d'indice ℓn jusqu'à celui d'indice $2\ell n - 1$ appartiennent à I . L'une ou l'autre des **questions 16 ou 17** permet de conclure que la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ contient bien n points alignés.

Deuxième cas : La position des termes de la suite $(v_k)_{k \geq 0}$ fluctue, tantôt dans I , tantôt à l'extérieur de I .

En considérant les sorties et les entrées successives dans l'intervalle I , nous pouvons construire une suite de couples $c_k = \{v_{u(k)} ; v_{u(k)+1}\}$ de termes consécutifs tels que, pour chaque indice k , l'un des deux éléments est à l'intérieur de I et l'autre à l'extérieur. Construisons ainsi au moins $8n^2$ couples.

L'une des deux extrémités de I sera ainsi encadrée par au moins $4n^2$ couples, donc par au moins $(B+1) \times n$ couples avec les notations introduites au début de cette question.

Les hypothèses de la **question 8** sont alors vérifiées. Nous pouvons conclure que la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ contient bien n points alignés.

Quel que soit le cas de figure, et quelle que soit la valeur de l'entier $n \geq 2$, la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ contient toujours au moins n points alignés.

18.b. Considérons, comme il n'est pas tout à fait indiqué dans l'énoncé, les $n \times 2^{32n^4 - 2}$ premiers points de la suite $(M_k)_{k \geq 0}$

L'exposant de 2 est ainsi choisi ainsi parce que : $32n^4 - 2 = (8n^2 - 2) \times (4n^2 + 1) = N \times ((B+1)n + 1)$ et que nous allons exploiter cette factorisation.

Intéressons-nous plus particulièrement aux termes de la suite $(v_k)_{k \geq 0}$ d'indices : $n \times 2^j$ où j appartient à l'ensemble : $\{1; 2; \dots; 32n^4 - 2\}$, à savoir les termes d'indices : $n, n \times 2, n \times 2^2, \dots, n \times 2^j, \dots, n \times 2^{32n^4 - 2}$.

Il y a ainsi $32n^4 - 2 = (8n^2 - 2) \times (4n^2 + 1)$ termes qui se répartissent dans les $N = 8n^2 - 2$ intervalles de subdivision $[q_k; r_k]$ ou bien $[r_k; q_{k+1}]$ des **questions 12 à 14**.

D'après le théorème des tiroirs, au moins un de ces intervalles contient au moins $4n^2 + 1$ termes. Soit I cet intervalle. Soit $j_1, < j_2 < \dots < j_{4n^2+1}$ les exposants j associés aux termes qui vérifient l'appartenance à I .

Distinguons deux cas de figure :

Premier cas : Il existe un exposant j_u tel que tous les termes de la suite $(v_k)_{k \geq 0}$ dont l'indice est entre $n \times 2^{j_u}$ et $n \times 2^{j_u+1}$, sans exception, sont aussi dans I . S'il en est ainsi, au moins tous les termes dont l'indice est entre $n \times 2^{j_u}$ (inclus) et $n \times 2^{j_u+1}$ (exclu) appartiennent à I . En vertu de l'une ou l'autre des **questions 16 ou 17**, la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ contient bien n points alignés

Deuxième cas : Ou bien cette circonstance n'a pas lieu et dans ce cas, pour chaque u tel que $1 \leq u \leq 4n^2 = (B+1)n$, il y a au moins un terme de la suite $(v_k)_{k \geq 0}$ d'indice compris entre $n \times 2^{j_u}$ (inclus) et $n \times 2^{j_u+1}$ (exclu) qui, lui, n'est pas dans I . Ainsi, entre les termes d'exposants j_u et j_{u+1} , une extrémité de I est traversée au moins deux fois (une fois pour sortir de I et une deuxième fois pour y rentrer).

En considérant les sorties et les entrées successives dans l'intervalle I , nous pouvons construire une suite finie d'au moins $8n^2$ couples $c_k = \{v_{u(k)}; v_{u(k)+1}\}$ de termes consécutifs tels que, pour chaque indice k , l'un des deux éléments est à l'intérieur de I et l'autre à l'extérieur.

Nous disposons alors d'au moins $8n^2 = 2(B+1) \times n$ termes qui sont de part et d'autre soit de la première extrémité de I , soit de la deuxième extrémité. Par conséquent, au moins $4n^2 = (B+1)n$ de ces termes sont de part et d'autre de l'une des deux extrémités.

De façon analogue au **18.a**, les hypothèses de la **question 8** sont alors vérifiées. Nous pouvons conclure que la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ contient bien n points alignés.

Quel que soit le cas de figure, et quelle que soit la valeur de l'entier $n \geq 2$, dans l'ensemble des $n \times 2^{32n^4 - 2}$ premiers points de la suite $(M_k)_{k \geq 0}$, il y a toujours au moins n points alignés.

NB. Il est sans doute possible de proposer un meilleur nombre car certaines majorations ont été faites « à la louche ».

Sous réserve de contrôle laissé au soin du lecteur :

Par exemple, nous avons vu que le nombre ℓ de fractions irréductibles de la **question 12** est majoré par $2n^2 + n - 1$, il serait possible de choisir : $N = 4n^2 + 2n - 4$.

Nous avons vu aussi que les dénominateurs des fractions r_k sont majorés par $4n - 2$, il serait possible de choisir : $B = 4n - 2$.

Il semble donc qu'on puisse proposer le nombre : $E = N \times ((B+1)n+1) = 16n^4 + 4n^3 - 14n^2 + 6n - 4$

comme exposant de 2 et remplacer le nombre de l'énoncé par le nombre $n \times 2^{16n^4 + 4n^3 - 14n^2 + 6n - 4}$.

Ainsi, pour être sûr d'avoir trois points alignés au moins, l'énoncé propose un nombre de points de l'ordre de $5,58 \times 10^{780}$; quant à nous, nous proposons un nombre de points de l'ordre de $1,40 \times 10^{780}$, quatre fois moins, et si ce nouveau nombre s'avère correct, nous n'en proposerions « que » $2,56 \times 10^{289}$, le gain serait substantiel..

Partie VII : Vers l'infini, et au delà !

19. Cette question joue quelque peu sur le sens que l'on donne à l'expression « une infinité de points alignés ».

Supposons d'abord qu'il existe une suite de points $(M_k)_{k \geq 0}$ telle que l'ensemble des nombres de points qui font partie d'un même alignement soit un ensemble borné.

Cet ensemble possède alors un plus grand élément. Soit A le nombre maximal de points alignés de cette suite $(M_k)_{k \geq 0}$.

Les différentes parties précédentes ont montré que l'on pouvait trouver dans toute suite $(M_k)_{k \geq 0}$ un nombre quelconque de points alignés. En particulier, on pourrait trouver un alignement de $A+1$ points, ce qui contredirait le statut de A , l'hypothèse d'un nombre maximal de points alignés est à rejeter.

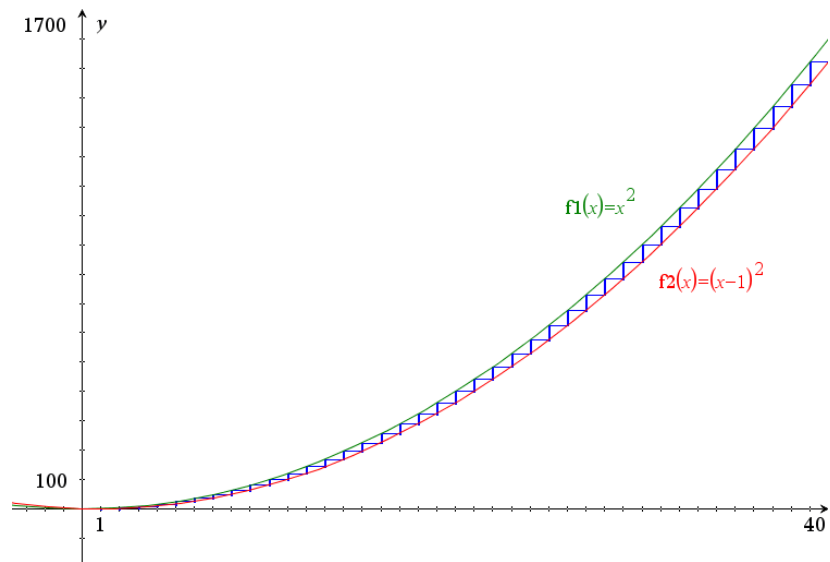
On peut donc trouver dans la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ des alignements arbitrairement longs, c'est-à-dire composés d'un nombre fini quelconque de points, aussi grand qu'on le veut.

Pour autant, est-ce qu'il existe toujours un vecteur \vec{u} fixé et un point M_i fixé de la suite tel que $\overrightarrow{M_i M_k}$ soit colinéaire à \vec{u} pour une infinité de valeurs de k ? Rien dans le problème ne prouve cette propriété.

Une suite de points $(M_k)_{k \geq 0}$ ne contient pas nécessairement une infinité de points alignés.

Illustration par un contre exemple

En bleu un chemin $(M_k)_{k \geq 0}$ en escalier coincé entre les paraboles d'équations $y = x^2$ et $y = (x-1)^2$. Il ne peut pas y avoir une infinité de points M_k alignés car il n'y a aucune droite qui soit incluse entièrement dans la région limitée par les deux paraboles.



NB. Ce problème, dont l'étude nous a captivé, qui nous amène à déterminer un ensemble fini qui possède à coup sûr une propriété donnée, exhale un délicat parfum de « théorie de Ramsey », théorie que nous avons découverte à cette occasion. Il nous initie à certaines des méthodes utilisées dans ce genre de situation. Nous invitons le lecteur à consulter par exemple l'article Wikipedia correspondant.

Problème 3 : Un tournoi par équipes

Partie I : Un jeu, deux joueurs

1.a. Etudions ce qu'il se passe au premier lancer. Nous sommes amenés à envisager un univers contenant quatre éventualités. En désignant par $(a ; b)$ le résultat des lancers d'Ambre et de Benjamin dans cet ordre :

Eventualité	(P, F)	(F, P)	(P, P)	(F, F)
Conséquence sur le déroulement du jeu	Ambre gagne	Benjamin gagne	Le jeu continue	Le jeu continue
Probabilité	$a \times (1-b)$	$b \times (1-a)$	$a \times b$	$(1-a) \times (1-b)$

L'évènement C_2 est l'évènement : « le jeu continue au-delà du premier lancer ».

$$\text{On en déduit que : } P(C_2) = a \times b + (1-a) \times (1-b) = 1 - a - b + 2ab = \lambda$$

En raison de l'hypothèse d'indépendance des lancers, la probabilité conditionnelle, sachant que le lancer numéro n a lieu, que le jeu continue au delà est égale à ce nombre λ : $P_{C_n}(C) = \lambda$ en désignant par C l'évènement « le jeu continue ».

1.b. L'évènement C_{n+1} est l'intersection de l'évènement C_n et de l'évènement « le jeu continue ». Ainsi, en raison de l'hypothèse d'indépendance des lancers que l'on vient d'évoquer : $P(C_{n+1}) = P(C_n) \times P_{C_n}(C) = P(C_n) \times \lambda$. Il apparaît que la suite $(P(C_n))_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison λ .

$$\text{Pour tout entier } n \geq 1 : P(C_n) = \lambda^{n-1}$$

2.a, b et c. L'évènement A_n est l'intersection de l'évènement C_n et de l'évènement « Ambre gagne lors du lancer simultané numéro n » : $P(A_n) = P(C_n) \times P_{C_n}(A_n)$.

$$\text{Ainsi, } P(A_n) = P(C_n) \times a \times (1-b) = a \times (1-b) \times \lambda^{n-1}$$

$$\text{De façon analogue : } P(B_n) = P(C_n) \times b \times (1-a) = b \times (1-a) \times \lambda^{n-1}$$

Remarquons au passage que les divers évènements A_1, A_2, \dots, A_n sont disjoints et qu'il en est de même des évènements B_1, B_2, \dots, B_n .

3.a. Par hypothèse, a et b sont tous deux strictement compris entre 0 et 1.

Le nombre λ peut se calculer de deux façons :

- $\lambda = a \times b + (1-a) \times (1-b)$, c'est la somme de deux réels strictement positifs, il est strictement positif.
- $\lambda = 1 - [a \times (1-b) + b \times (1-a)]$, en utilisant l'évènement complémentaire. Or, $a \times (1-b) + b \times (1-a)$ est la somme de deux réels strictement positifs. Donc : $1 > \lambda$

En définitive : $0 < \lambda < 1$

3.b. L'évènement G_A contient la réunion : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ et a donc une probabilité plus grande que celle de cet évènement. Cet évènement, en effet, est l'évènement « Ambre gagne avant le lancer numéro $n+1$ ». (Elle peut aussi gagner plus tard ...)

Ces évènements étant disjoints, la probabilité de cette réunion est la somme de leurs probabilités, c'est-à-

dire : $\sum_{k=1}^n a \times (1-b) \times \lambda^{n-1} = a \times (1-b) \sum_{k=1}^n \lambda^{n-1} = a \times (1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

Ainsi, quel que soit l'entier $n \geq 1$, $P(G_A) \geq a \times (1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

De la même façon, G_B contient la réunion : $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ dont la probabilité est

$\sum_{k=1}^n b \times (1-a) \times \lambda^{n-1} = b \times (1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

Ainsi, quel que soit l'entier $n \geq 1$: $P(G_B) \geq b \times (1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

3.c. Nous avons vu que $0 < \lambda < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$

Puisque les inégalités $P(G_A) \geq a \times (1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$ et $P(G_B) \geq b \times (1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$ sont universelles (quel que soit n), elles se conservent par passage à la limite : $P(G_A) \geq a \times (1-b) \times \frac{1}{1-\lambda}$ et $P(G_B) \geq b \times (1-a) \times \frac{1}{1-\lambda}$

Réciproquement, considérons l'évènement $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$. L'évènement G_A est contenu dans $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ car, si Ambre gagne, l'un exactement des évènements A_i est réalisé. G_A a une probabilité au plus égale à la limite précédente, donc finalement, exactement égale à cette limite :

$$P(G_A) = a \times (1-b) \times \frac{1}{1-\lambda}.$$

Pour des raisons analogues : $P(G_B) = b \times (1-a) \times \frac{1}{1-\lambda}$

Nous obtenons alors : $P(G_A) + P(G_B) = \frac{a \times (1-b) + b \times (1-a)}{1-\lambda} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1$

Vu que ces deux évènements sont disjoints ($G_A \cap G_B = \emptyset$, la victoire de l'un exclut celle de l'autre), $P(G_A \cup G_B) = P(G_A) + P(G_B) = 1$. Il est donc certain que l'un ou l'autre des deux joueurs va gagner la partie.

L'évènement G_\emptyset , qui est le complémentaire de $G_A \cup G_B$, a une probabilité nulle, il est impossible que la partie se prolonge indéfiniment sans fournir un gagnant.

Partie II : Qu'est-ce qu'un jeu régulier ?

4. En supposant qu'à un tour donné A_i affronte A_j , nous avons, en accordant les notations choisies ici avec celles de la partie précédente : $\lambda = 1 - p_i - p_j + 2 p_i p_j$ et $1 - \lambda = p_i + p_j - 2 p_i p_j$ et ensuite :

$$P(A_i \text{ gagne contre } A_j) = \frac{p_i(1 - p_j)}{p_i + p_j - 2 p_i p_j} \text{ et } P(A_j \text{ gagne contre } A_i) = \frac{p_j(1 - p_i)}{p_i + p_j - 2 p_i p_j}$$

Conformément aux conclusions de la question précédente, un et un seul des deux joueurs sera déclaré vainqueur.

Il reste à vérifier la condition sur le quotient des probabilités :

$$\frac{P(A_i \text{ gagne contre } A_j)}{P(A_j \text{ gagne contre } A_i)} = \frac{p_i(1 - p_j)}{p_j(1 - p_i)} = \frac{a_i}{a_j} \text{ en posant } a_i = \frac{p_i}{1 - p_i} \text{ et } a_j = \frac{p_j}{1 - p_j}. \text{ Il s'agit de la même}$$

formule, seul change l'indice.

Il existe effectivement 2022 coefficients : $a_i = \frac{p_i}{1 - p_i}$ pour $1 \leq i \leq 2022$ tels que

$$\frac{P(A_i \text{ gagne contre } A_j)}{P(A_j \text{ gagne contre } A_i)} = \frac{a_i}{a_j} \text{ pour tout couple } (i ; j) \text{ d'indices distincts et ces coefficients sont tous}$$

strictement positifs puisque $0 < p_i < 1$ pour tout $1 \leq i \leq 2022$.

Toutes les conditions requises sont remplies.

Le jeu décrit est un jeu régulier.

Partie III : Un tournoi régulier par équipes

5. Supposer que $a_i = b_j$ pour tout i et tout j revient à supposer que les parties sont équitables, c'est-à-dire que chaque joueur de l'équipe A a une probabilité de gagner une partie contre chaque joueur de l'équipe B égale à $\frac{1}{2}$.

5.a. Les évènements « A gagne le tournoi » et « B gagne le tournoi » sont des évènements complémentaires. Il est certain que l'une des équipes aura tous ses joueurs éliminés au plus tard au tour numéro $m + n - 1$.

La probabilité que B gagne le tournoi est $1 - u_{m,n}$. Mais si l'on intervertit les rôles des équipes A et B, cette probabilité est la même que celle que A gagne le tournoi avec n joueurs contre B avec m joueurs : $1 - u_{m,n} = u_{n,m}$.

Par conséquent : $u_{m,n} + u_{n,m} = 1$.

5.b. Lorsque A et B ont le même nombre de joueurs :
$$\begin{cases} u_{n,n} + u_{n,n} = 1 \\ u_{n,n} = 1 - u_{n,n} \end{cases}$$

Par conséquent : $u_{n,n} = \frac{1}{2}$.

5.c. L'équipe A gagne le tournoi si l'unique joueur de l'équipe A gagne toutes ses parties face à tous les joueurs de l'équipe B (il gagne donc n parties consécutives) :

Par conséquent : $u_{1,n} = \frac{1}{2^n}$

5.d. L'équipe A gagne le tournoi si le joueur A_1 gagne les n premières parties ou bien si le joueur A perd l'une de ces parties mais le joueur A_2 gagne toutes les parties suivantes jusqu'à la partie numéro $(n + 1)$.

Pour $1 \leq k \leq n$, la probabilité que A_1 gagne les $(k - 1)$ premières parties, perde la partie numéro k puis que A_2 gagne les parties suivantes (la partie numéro $(k + 1)$ se jouant contre le joueur qui a éliminé A_1) est égale à :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Par conséquent : $u_{2,n} = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{n+2}{2^{n+1}}$

6.a. Désignons pour tout couple d'indices $(i ; j)$ par $p_{i,j}$ la probabilité que A_i gagne la partie face à B_j et par $q_{i,j}$ la probabilité que B_j gagne la partie face à A_i

Les deux relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} p_{i,j} + q_{i,j} = 1 \\ \frac{p_{i,j}}{q_{i,j}} = \frac{a_i}{b_j} \end{cases} .$$

On en déduit : $p_{i,j} = \frac{a_i}{a_i + b_j}$ **et, accessoirement,** $q_{i,j} = \frac{b_j}{a_i + b_j}$

6.b. Etudions les différents déroulements à l'issue desquels l'équipe A gagne le tournoi, en calculant leurs probabilités :

Scénario	Probabilité
A_1 gagne face à B_1 et gagne face à B_2	$p_{1,1} \times p_{1,2} = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \times \frac{a_1}{a_1 + b_2}$
A_1 gagne face à B_1 et perd face à B_2 puis A_2 gagne face à B_2	$p_{1,1} \times q_{1,2} \times p_{2,2} = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \times \frac{b_2}{a_1 + b_2} \times \frac{a_2}{a_2 + b_2}$
A_1 perd face à B_1 puis A_2 gagne face à B_1 et face à B_2	$q_{1,1} \times p_{2,1} \times p_{2,2} = \frac{b_1}{a_1 + b_1} \times \frac{a_2}{a_2 + b_1} \times \frac{a_2}{a_2 + b_2}$

La probabilité que A gagne le tournoi est la somme de ces probabilités, c'est-à-dire :

$$u_{2,2} = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \times \frac{a_1}{a_1 + b_2} + \frac{a_1}{a_1 + b_1} \times \frac{b_2}{a_1 + b_2} \times \frac{a_2}{a_2 + b_2} + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \times \frac{a_2}{a_2 + b_1} \times \frac{a_2}{a_2 + b_2}$$

Sous cette forme, il n'est pas du tout apparent que la probabilité de gagner le tournoi soit indépendante de l'ordre d'entrée en jeu des joueurs.

Nous préférons déléguer à un logiciel de calcul formel le soin de vérifier que l'expression de $u_{2,2}$ que nous avons trouvée est bien identique à l'expression donnée par l'énoncé.

Le logiciel nous donne effectivement son accord, les expressions « x » et « y » de l'écran ci-contre sont identiques.

$$\frac{\frac{a_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{a_1}{a_1+b_2} + \frac{a_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{b_2}{a_1+b_2} \cdot \frac{a_2}{a_2+b_2} + \frac{b_1}{a_1+b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2+b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2+b_2}}$$

$$\frac{a_1^2 \cdot (a_2+b_2) \cdot (a_2+b_1)+a_1 \cdot a_2 \cdot (a_2 \cdot (b_1+b_2)+b_1 \cdot b_2)+a_2^2 \cdot b_1 \cdot b_2}{(a_1+b_2) \cdot (a_1+b_1) \cdot (a_2+b_2) \cdot (a_2+b_1)}$$

 getNum $\left(\frac{a_1^2 \cdot (a_2+b_2) \cdot (a_2+b_1)+a_1 \cdot a_2 \cdot (a_2 \cdot (b_1+b_2)+b_1 \cdot b_2)+a_2^2 \cdot b_1 \cdot b_2}{(a_1+b_2) \cdot (a_1+b_1) \cdot (a_2+b_2) \cdot (a_2+b_1)} \right)$

$$a_1^2 \cdot (a_2+b_2) \cdot (a_2+b_1)+a_1 \cdot a_2 \cdot (a_2 \cdot (b_1+b_2)+b_1 \cdot b_2)+a_2^2 \cdot b_1 \cdot b_2$$

 Define x= $a_1^2 \cdot (a_2+b_2) \cdot (a_2+b_1)+a_1 \cdot a_2 \cdot (a_2 \cdot (b_1+b_2)+b_1 \cdot b_2)+a_2^2 \cdot b_1 \cdot b_2$ Terminé

 Define y= $a_1^2 \cdot a_2^2+a_1 \cdot a_2 \cdot (a_1+a_2) \cdot (b_1+b_2)+(a_1^2+a_1 \cdot a_2+a_2^2) \cdot b_1 \cdot b_2$ Terminé

 x=y true

 x-y 0

 |

Cette vérification étant faite, nous reconnaissons que l'expression donnée par l'énoncé a un avantage incontestable sur la nôtre : elle fait apparaître clairement la symétrie de l'expression de $u_{2,2}$ par rapport aux indices : si nous permutons d'une quelconque façon les indices 1 et 2 soit de a_1 et a_2 soit de b_1 et de b_2 , l'expression de $u_{2,2}$ ne change pas. En raison de cette symétrie, nous pouvons affirmer que :

La probabilité que l'équipe A gagne le tournoi ne dépend pas de l'ordre d'apparition des deux joueurs dans le tournoi.

Partie IV : Une généralisation

7. On distingue deux formes de tableaux gagnants :

- Ou bien le joueur A_1 gagne toutes ses parties et le joueur A_2 rencontre « pour du beurre » tous les joueurs de l'équipe B. Il y a ainsi 2^n tableaux gagnants, car il y a deux issues possibles pour chacune des n parties jouées par A_2 .

		B_1	B_2	B_n
Joueur A1		A	A	A	A	A	A	A
Joueur A2		?	?	?	?	?	?	?

- Ou bien il existe un entier k vérifiant $1 \leq k \leq n$ tel que le joueur A_1 perd face à B_k . Ensuite A_2 gagne face à B_k et gagne face aux joueurs suivants. Pour chaque entier k , il y a $(n-1)$ parties dont le résultat n'influence pas le tournoi : celles jouées par A_2 face aux joueurs précédant B_k (s'il y en a) et celles jouées par A_1 face aux joueurs suivant B_k (s'il y en a). Pour k fixé, il y a deux issues possibles pour chacune des $(n-1)$ parties n'influençant pas le résultat. Il y a ainsi $n \times 2^{n-1}$ tableaux gagnants de cette forme.

		B_1	B_2	...	B_k	B_n
Joueur A1		A	A	A	B	?	?	?
Joueur A2		?	?	?	A	A	A	A

Au total, il y a $2^n + n \times 2^{n-1} = (n+2) \times 2^{n-1}$ tableaux gagnants.

8.a. Nous reprenons les notations de la **question 6** : $p_{i,j}$ est la probabilité que A_i gagne la partie face à B_j et $q_{i,j}$ est la probabilité que B_j gagne la partie face à A_i .

Nous avons vu : $p_{1,j} = \frac{a_1}{a_1 + b_j}$ et $q_{1,j} = \frac{b_j}{a_1 + b_j}$ et pareillement $p_{2,j} = \frac{a_2}{a_2 + b_j}$ et $q_{2,j} = \frac{b_j}{a_2 + b_j}$

La probabilité d'obtenir un tableau T donné aux conditions indiquées est alors :
$$\frac{a_1^{x_1} a_2^{x_2} \prod_{j=1}^n b_j^{y_j}}{D}$$

Si en effet A_1 (respectivement A_2 puis B_j) a gagné x_1 (respectivement x_2 puis y_j) parties le nombre a_1 (respectivement a_2 puis b_j) figure x_1 (respectivement x_2 puis y_j) fois en facteur au numérateur dans l'expression de cette probabilité. Le dénominateur est le produit de tous les nombres décrit dans l'énoncé.

8.b.i Si un tableau contient une colonne « B B », cela signifie que le joueur B_j de la colonne concernée a battu ses deux adversaires de l'équipe A, adversaires qui sont éliminés au plus tard par ce joueur. L'équipe gagnante est l'équipe B : il s'agit d'un tableau perdant. Par contraposition :

Aucun tableau gagnant ne contient de colonne « B B ».

Si dans un tableau une colonne « A B » est à droite d'une colonne « B A », cela signifie que le joueur A_1 perd d'abord face à un adversaire ; c'est ensuite le joueur A_2 qui prend la main et qui perd à son tour face à un adversaire, l'équipe gagnante est l'équipe B : il s'agit d'un tableau perdant. Par contraposition :

Aucun tableau gagnant ne contient de colonne « A B » à droite d'une colonne « B A ».

Réciproquement, si dans un tableau, il n'y a pas de colonnes « B B » et que les colonnes « A B » sont toutes à gauche de la première colonne « B A », cela veut dire que le joueur A_2 gagne toutes ses parties après la première défaite du joueur A_1 , le tableau est gagnant.

Un tableau est gagnant s'il remplit les conditions suivantes :

- Il n'y a pas de colonne « B B ».
- On trouve réparties dans le tableau (et s'il y en a) d'abord toutes les colonnes « A B » et ensuite toutes les colonnes « B A ».

8.b.ii. Notons f la transformation décrite dans cette question, définie sur l'ensemble des tableaux gagnants. Soit k le nombre de colonnes « A B » et ℓ le nombre de colonnes « B A » du tableau gagnant T (qui sont toutes placées après les colonnes « A B »)

Le nouveau tableau $f(T)$ ne contient aucune colonne « B B », on y trouve aux places autres que les colonnes « A A » d'abord les ℓ colonnes « A B » suivies des k colonnes « B A » :

Le tableau T' remplit les conditions énoncées dans 8.b.i, il est gagnant.

Si on réitère la même transformation, on retrouve le tableau T initial.

8.c. Considérons un tableau gagnant T avec k colonnes « A B » et à la suite ℓ colonnes « B A ».

Soit p la transformation consistant à permuter les deux lignes du tableau.

Cette permutation revient à faire jouer le joueur A_2 d'abord et le joueur A_1 ensuite.

Nous obtenons un tableau avec, autres que « A A », k colonnes « B A » suivies de ℓ colonnes « A B ». En appliquant ensuite la transformation f , on obtient un tableau avec ℓ colonnes « A B » suivies de k colonnes « B A », c'est-à-dire un tableau gagnant. L'application $f \circ p$ associe à un tableau gagnant où A_1 joue en premier un tableau gagnant où A_2 joue en premier. Or, cette application $f \circ p$, appliquée aux tableaux gagnants, est involutive : si on l'applique une nouvelle fois, on retrouve le tableau gagnant initial.

L'ensemble de tous les tableaux gagnants si A_1 joue en premier est identique à l'ensemble de tous les tableaux $f \circ p(T)$, gagnants si A_2 joue en premier.

La probabilité que A gagne la partie peut se calculer indifféremment par : $\sum_{T \text{ gagnant}} P(T)$ ou par

$\sum_{T \text{ gagnant}} P(f \circ p(T))$, l'échange des joueurs ne la modifie pas.

La probabilité que l'équipe A gagne le tournoi ne dépend pas de l'ordre d'entrée en jeu des deux joueurs.

9. On peut proposer un raisonnement par récurrence sur le nombre de joueurs.

Initialisation au rang 2 : La question précédente montre que, si l'équipe A est composée de deux joueurs, l'ordre d'entrée en jeu des deux joueurs n'influe pas sur le résultat.

Hérédité : Supposons que, pour un certain $n \geq 2$, l'ordre choisi pour l'entrée en jeu des joueurs pour toute équipe de n joueurs n'influe pas sur le résultat. Soit une équipe A de $(n+1)$ joueurs numérotés par ordre d'entrée en jeu de 1 à $(n+1)$, et soit s une permutation des $(n+1)$ entiers.

On peut considérer que cette équipe est constituée d'une sous-équipe des n premiers joueurs, par hypothèse interchangeable, que l'on assimile à un unique « super-joueur » et du joueur A_{n+1} .

Soit $j = s(n+1)$. Cet indice désigne le nouveau numéro d'ordre d'entrée en jeu du joueur $(n+1)$.

Premier cas : Si $j = n+1$:

D'après l'hypothèse de récurrence, la probabilité que le « super-joueur » gagne la partie à lui tout seul ne dépend pas de l'ordre d'entrée en jeu des n premiers joueurs, on peut les permuer entre eux sans changer cette probabilité. La permutation s n'influe pas sur le résultat final.

Deuxième cas : Si $j \neq n+1$:

- Echangeons d'abord les joueurs A_j et A_n , le joueur A_j devenant l'avant-dernier joueur, ce qui donne l'ordre de passage : $(1, 2, \dots, j-1, n, j+1, \dots, n-1, j, n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, la probabilité que le « super-joueur » gagne la partie à lui tout seul ne change pas.
- D'après la **question 8.c**, le résultat final ne change pas non plus si on intervertit l'ordre de passage du joueur A_{n+1} et du « super-joueur », c'est-à-dire si l'ordre de passage est : $(n+1, 1, 2, \dots, j-1, n, j+1, \dots, n-1, j = s(n+1))$. Le joueur A_{n+1} joue en premier et A_j est désormais le dernier joueur de l'équipe.
- La sous-équipe $\{n+1, 1, 2, \dots, j-1, n, j+1, \dots, n-1\}$ est composée de n -joueurs, en vertu de l'hypothèse de récurrence, la probabilité qu'elle gagne la partie à elle seule ne change pas si on permute entre eux ses joueurs.

- Appliquons-lui en particulier la permutation t ainsi définie :
$$\begin{cases} t(n+1) = s(1) \\ t(k) = s(k+1) \text{ pour } 1 \leq k \leq j-1. \\ t(k) = s(k) \text{ pour } j+1 \leq k \leq n \end{cases}$$

L'ordre de passage devient maintenant $(s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1))$ et ne change pas le résultat final.

La permutation s , quelle qu'elle soit, n'influe pas sur le résultat final.

Si toute équipe de n joueurs est interchangeable, alors toute équipe de $(n+1)$ joueurs est interchangeable, l'hérédité est établie.

Quel que soit le nombre de joueurs de l'équipe A , la probabilité que A gagne le tournoi ne dépend pas de l'ordre d'entrée en jeu des joueurs.